D13

MAY 12 193(

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 162

Heft 1

Ausgegeben den 12. April 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 162. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Remak, Robert, Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen	1
Jordan, Henri, Eine neue Methode zur Herleitung asymptotischer Ausdrücke in Anwendung auf die Besselschen Funktionen	17
Grell, Heinrich, Zur Normentheorie in hyperkomplexen Systemen	60
Lubelski, S., Zur Theorie der höheren Kongruenzen	63

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen.

Von *Robert Remak* in Berlin.

Einleitung.

Die folgenden Betrachtungen über minimale invariante Untergruppen dienen als Vorbereitung einer weiteren Arbeit: „*Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte*“, sind aber auch an sich von Interesse.

Die invariante Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ heiße „*minimale invariante Untergruppe*“, wenn keine von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$ verschiedene Untergruppe von $\mathfrak{F}$ invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. ($\mathfrak{F}$ darf also selber noch invariante Untergruppen besitzen, die aber nicht mehr invariant in $\mathfrak{G}$ sein dürfen.) Für minimale invariante Untergruppe einer Gruppe will ich zur Abkürzung „*Fuß*“ der Gruppe sagen. Das Produkt sämtlicher Füße soll der „*Sockel*“ der Gruppe heißen. Wie leicht ersichtlich, ist der Sockel das direkte Produkt geeignet gewählter Füße. Es soll die Frage untersucht werden, welchen Bedingungen die Komponenten eines im direkten Produkt nicht als Faktor vorkommenden Fußes genügen müssen. Es ergibt sich, daß die Komponenten, die nicht gleich der Einheit $\mathfrak{E}$ sind, gleich dem ganzen aus einem Fuß bestehenden Faktor sein müssen, daß die Komponenten untereinander isomorph sein und noch einer weiteren, unten genauer zu definierenden Bedingung, der „*Kohärenz*“-Bedingung, genügen müssen. Das Produkt sämtlicher untereinander kohärenter Füße bildet eine „*Kohärente*“. Der Sockel ist identisch eindeutig als direktes Produkt der Kohärenten darstellbar. Ist der Sockel auf zweierlei Art als direktes Produkt von Füßen dargestellt, so sind die Faktoren, von der Reihenfolge abgesehen, paarweise einander kohärent [1]). Wir werden die Füße einteilen in Füße I. Art, die dem Zentrum der Gruppe angehören, d. h. aus invarianten Elementen bestehen, II. Art, die zwar kommutativ sind, aber nicht dem Zentrum angehören, und III. Art, die nicht kommutativ sind. Nur zwischen kommutativen Füßen können Kohärenzen bestehen. Das hat für die Füße III. Art, deren innerer Bau kompliziert ist, ein sehr einfaches Verhalten nach außen hin zur Folge.

Der Fuß eines Fußes möge „*Huf*“ heißen. Bekanntlich sind die Hufe einfache Gruppen, sämtliche Hufe eines Fußes sind einander isomorph, und der Fuß ist das direkte Produkt geeignet gewählter Hufe [2]). Diese bekannten Tatsachen werde ich noch einmal mit beweisen. Die erwähnte Unmöglichkeit der Kohärenz zwischen Füßen III. Art werden wir auf die Hufe III. Art anwenden und so zu sehr eingehenden Aussagen über die Konstitution der Füße III. Art gelangen.

Um den Gang des Beweises nicht zu unterbrechen, schicke ich in § 1 einige ganz einfache Hilfssätze über direkte Produkte voraus. § 2 behandelt direkte Zerlegungen des

[1]) Aus dem Satz über die isomorph eindeutige Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte Faktoren (Journ. f. Math. **139** (1911), S. 293—308 und vereinfacht **153** (1924), S. 131—140) folgt dies nicht, da die Füße nicht direkt unzerlegbar sind.

[2]) Siehe *Burnside*, Theory of groups of finite order (Cambridge 1911), 2. Aufl. S. 70—71.

Sockels. In § 3 wird die Einteilung der Füße in die drei Arten eingeführt. § 4 wendet die gewonnenen Sätze auf die Konstitution der Füße selbst, insbesondere ihre direkte Zerlegung in Hufe an. § 5 behandelt hierauf gestützt die Automorphismen der Füße. Zum Schluß werden die Ergebnisse der Arbeit tabellarisch kurz zusammengestellt.

§ 1. Hilfssätze.

Gruppen werden mit deutschen, Elemente mit lateinischen Buchstaben bezeichnet. Es bedeute das Zeichen $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{A}$; für Elemente: $A < \mathfrak{A}$, A ist Element von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B} <_i \mathfrak{A}$ bedeute, $\mathfrak{B}$ ist invariante Untergruppe von $\mathfrak{A}$; man beachte aber, daß dies Zeichen nicht transitiv ist. Aus $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} <_i \mathfrak{A}$ darf man *nicht* folgern $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{A}$. Dagegen kann man bekanntlich aus

$$\mathfrak{C} < \mathfrak{B} < \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C} <_i \mathfrak{A}$$

folgern, daß

$$\mathfrak{C} <_i \mathfrak{B}.$$

$\times$ sei das Zeichen der direkten Multiplikation, für Elemente das Zeichen der eindeutigen Komponentenzerlegung.

Hilfssatz 1: *Es sei*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2; \quad \mathfrak{B}_1 <_i \mathfrak{A}_1.$$

Behauptung:

$$\mathfrak{B}_1 <_i \mathfrak{Q}.$$

Beweis: Es sei

$$B_1 < \mathfrak{B}_1; \quad Q < \mathfrak{Q}; \quad Q = A_1 \times A_2.$$

Dann ist

$$Q B_1 Q^{-1} = A_1 B_1 A_1^{-1} \times A_2 E A_2^{-1} = A_1 B_1 A_1^{-1} < \mathfrak{B}_1,$$

also

$$\mathfrak{B}_1 <_i \mathfrak{Q}.$$

Hilfssatz 2: *Es sei*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2; \quad \mathfrak{D} <_i \mathfrak{Q}.$$

$\mathfrak{B}_1$ sei die $\mathfrak{A}_1$-Komponente von $\mathfrak{D}$, d. h. die Gruppe der $\mathfrak{A}_1$-Komponenten der Elemente von $\mathfrak{D}$.

Behauptung:

$$\mathfrak{B}_1 <_i \mathfrak{Q}.$$

Beweis: Es sei

$$D < \mathfrak{D}; \quad D = B_1 \times B_2; \quad Q < \mathfrak{Q}; \quad Q = A_1 \times A_2.$$

Es ist

$$Q D Q^{-1} = D' < \mathfrak{D}$$

oder

$$A_1 B_1 A_1^{-1} \times A_2 B_2 A_2^{-1} = B_1' \times B_2' < \mathfrak{D},$$

mithin $B_1' < \mathfrak{B}_1$; also, da A_1 mit veränderlichem Q alle Elemente von $\mathfrak{A}_1$ durchläuft, ist $\mathfrak{B}_1 <_i \mathfrak{A}_1$, also auch $\mathfrak{B}_1 <_i \mathfrak{Q}$ nach Hilfssatz 1, was zu beweisen war.

Hilfssatz 3: *Es sei*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2; \quad \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{D} < \mathfrak{Q}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2).$$

$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bedeute den Durchschnitt der beiden Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{D}$ nach Voraussetzung, $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2) < \mathfrak{D}$, also

$$\mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2) < \mathfrak{D}.$$

Es sei

$$D < \mathfrak{D}; \quad D = B_1 \times B_2,$$

also

$$B_1^{-1} D = B_2.$$

Da

$$B_1^{-1} < \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{D}$$

und

$$D < \mathfrak{D},$$

so ist auch

$$B_2 < \mathfrak{D}.$$

Ferner ist $B_2 < \mathfrak{A}_2$, also $B_2 < (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2)$, mithin

$$D = B_1 \times B_2 < \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2),$$
$$\mathfrak{D} < \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2),$$

folglich

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1 \times (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2).$$

Hilfssatz 4. *Es sei*

$$\mathfrak{C}_1 <_i \mathfrak{G}; \quad \mathfrak{C}_2 <_i \mathfrak{G}; \quad (\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \mathfrak{E}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2.$$

Beweis: Es sei

$$C_1 < \mathfrak{C}_1; \quad C_2 < \mathfrak{C}_2.$$

Es ist

$$C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1} = C_1 (C_2 C_1^{-1} C_2^{-1}) < \mathfrak{C}_1; \quad C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1} = (C_1 C_2 C_1^{-1}) C_2^{-1} < \mathfrak{C}_2;$$

also

$$C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1} < (\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \mathfrak{E}; \quad C_1 C_2 C_1^{-1} C_2^{-1} = E;$$
$$C_1 C_2 = C_2 C_1.$$

Die Gruppen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sind elementweise vertauschbar und teilerfremd, d. h. ihr Produkt ist ein direktes:

$$\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2.$$

Hilfssatz 5: *Es sei*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2; \quad \mathfrak{D} < \mathfrak{Q}.$$

$\mathfrak{B}_1$ *sei die* $\mathfrak{A}_1$*-Komponente von* $\mathfrak{D}$.

Behauptung: Jedes Element $B_1 < \mathfrak{B}_1$ *kommt gleich oft als Komponente in* $\mathfrak{D}$ *vor; und zwar ist die Anzahl gleich der Ordnung* c_2 *von* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2)$.

Beweis: Es sei $D < \mathfrak{D}$ ein festes Element von $\mathfrak{D}$; $D' < \mathfrak{D}$ durchlaufe alle Elemente von $\mathfrak{D}$, die die gleiche $\mathfrak{A}_1$-Komponente haben. Es ist also

$$D = B_1 \times B_2; \quad D' = B_1 \times B_2'; \quad D' D^{-1} = B_1 B_1^{-1} \times B_2' B_2^{-1} = B_2' B_2^{-1}.$$

Also

$$D' D^{-1} < \mathfrak{A}_2; \; D' D^{-1} < \mathfrak{D};$$

folglich

$$D' D^{-1} < (\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2).$$

Es durchlaufe umgekehrt C_2 sämtliche Elemente von $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2)$. Dann ist

$$D' = D C_2 < \mathfrak{D};$$

ferner ist

$$D' = D C_2 = B_1 \times B_2 C_2,$$

also haben D' und D dieselbe $\mathfrak{A}_1$-Komponente. DC_2 durchläuft also alle Elemente von $\mathfrak{D}$ und nur solche, die die gleiche $\mathfrak{A}_1$-Komponente haben wie D. Deren Anzahl ist also gleich c_2, der Ordnung von $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_2)$.

Ist $d = \text{Ord } \mathfrak{D}$; $b_1 = \text{Ord } \mathfrak{B}_1$, so ist $d = b_1 c_2$.

§ 2. Über direkte Zerlegungen des Sockels.

Definition: *Es sei* $\mathfrak{F} <_i \mathfrak{G}$, *und es gebe keine Untergruppe* $\mathfrak{X}$, *so daß* $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{E}$, $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{F}$, $\mathfrak{X} < \mathfrak{F}$, $\mathfrak{X} <_i \mathfrak{G}$; *dann heiße* $\mathfrak{F}$ *minimale invariante Untergruppe oder „Fuß" von* $\mathfrak{G}$.

Ein Fuß kann in einer invarianten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ nur entweder enthalten oder zu ihr teilerfremd sein. Wäre der Durchschnitt $\neq \mathfrak{F}$ und $\neq \mathfrak{E}$, so würde er, weil $<_i \mathfrak{G}$, der Definition von $\mathfrak{F}$ widersprechen.

Das Produkt $\mathfrak{S}$ sämtlicher Füße von $\mathfrak{G}$ heiße der „*Sockel*" von $\mathfrak{G}$.

Man wähle einen Fuß $\mathfrak{F}_1$. Ein davon verschiedener Fuß $\mathfrak{F}_2$ ist sicher zu $\mathfrak{F}_1$ teilerfremd. Also ist ihr Produkt nach Hilfssatz 4 ein direktes. Ein dritter Fuß $\mathfrak{F}_2$ ist entweder im Produkt $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ enthalten oder zu ihm teilerfremd. Im letzteren Falle bilde man $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3$. So fahre man fort und bilde das Produkt sämtlicher Füße, indem man diejenigen fortläßt, die bereits im Produkt der vorangehenden enthalten sind. Der Sockel läßt sich somit als direktes Produkt einer Anzahl geeignet gewählter Füße darstellen.

Satz 1a: *Es sei* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{C} < \mathfrak{S}$. *Dann gibt es* $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$ *so daß*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}.$$

$\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *sind als direktes Produkt geeignet gewählter Füße von* $\mathfrak{G}$ *darstellbar.*

Beweis: Man notiere sämtliche Füße von $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$, für die $\mathfrak{F}_\lambda < \mathfrak{C}$; sodann sämtliche übrigen Füße von $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{F}_{l+1}, \mathfrak{F}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{F}_n$. Dann wende man das soeben beschriebene Verfahren an. Man bilde $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, lasse jeden Fuß fort, der im Produkt der vorangehenden enthalten ist, füge jeden, der nicht im Produkte der vorangehenden enthalten ist, als direkten Faktor hinzu, und führe das Verfahren zunächst bis $\mathfrak{F}_l$ durch. Dann erhält man bei passender Wahl der Bezeichnung:

$$\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_l = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_s.$$

Es ist $\overline{\mathfrak{C}} < \mathfrak{C}$. Sodann fahre man fort und berücksichtige die übrigen Füße $\mathfrak{F}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die nicht in $\mathfrak{C}$ enthalten sind. Man erhält so

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_s \times \mathfrak{F}_{s+1} \times \cdots \times \mathfrak{F}_r = \overline{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{D},$$

wo $\mathfrak{D}$ zur Abkürzung des direkten Produkts von $\mathfrak{F}_{s+1}$ an eingeführt ist. Es ist

$$\overline{\mathfrak{C}} < \mathfrak{C} < \overline{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{D},$$

also ist nach Hilfssatz 3

$$\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{C}} \times (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}).$$

Wäre $\mathfrak{C} \neq \overline{\mathfrak{C}}$, so wäre $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) \neq \mathfrak{E}$, also, da $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$; $\mathfrak{D} <_i \mathfrak{G}$, auch $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) <_i \mathfrak{G}$; also enthielte $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ einen Fuß $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$; es wäre $\mathfrak{F} < \mathfrak{C}$; $(\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{C}}) = \mathfrak{E}$. Das würde aber der Definition von $\overline{\mathfrak{C}}$ widersprechen, da alle Füße von $\mathfrak{G}$, die $< \mathfrak{C}$, auch $< \overline{\mathfrak{C}}$ sein sollten. Also ist

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D},$$

was zu beweisen war.

Satz 1: *Ist der Sockel einer Gruppe als direktes Produkt geeignet gewählter Füße dargestellt, so besitzt ein beliebiger Fuß in der Zerlegung nach diesem Produkte lauter untereinander und zu ihm selbst kohärent zugeordnete Komponenten, soweit sie nicht gleich* $\mathfrak{E}$

sind. Jede Komponente, die von E verschieden ist, kommt nur in einem Element des darzustellenden Fußes vor.

Hierbei heißen zwei Füße kohärent zugeordnet, wenn sie eindeutig isomorph sind und die Zuordnung so beschaffen ist, daß sie bei gleichzeitiger Transformation beider Füße mit einem beliebigen Element der ganzen Gruppe erhalten bleibt.

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_r$$

eine direkte Zerlegung des Sockels in Füße. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Fuß, der nicht als Faktor in dieser Zerlegung vorkommt. $\mathfrak{P}_\varrho$ sei die $\mathfrak{F}_\varrho$-Komponente von $\mathfrak{P}$. Es sei $P < \mathfrak{P}$; $P_\varrho < \mathfrak{P}_\varrho$.

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$$

sei die Komponentenzerlegung von P. Es sei $G < \mathfrak{G}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$. Es ist

$$GPG^{-1} = G(P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r)G^{-1} = GP_1G^{-1} \cdot GP_2G^{-1} \cdots GP_rG^{-1}.$$

Da $\mathfrak{F}_\varrho <^i \mathfrak{G}$ und $P_\varrho < \mathfrak{F}_\varrho$, so ist

$$GP_\varrho G^{-1} < \mathfrak{F}_\varrho;$$

mithin darf man schreiben:

$$GPG^{-1} = GP_1G^{-1} \times GP_2G^{-1} \times \cdots \times GP_rG^{-1}.$$

Das heißt: die rechte Seite liefert die Komponentenzerlegung von GPG^{-1}. Folglich ist

$$GP_\varrho G^{-1} < \mathfrak{P}_\varrho,$$

also $\mathfrak{P}_\varrho <^i \mathfrak{G}$. Da aber $\mathfrak{P}_\varrho < \mathfrak{F}_\varrho$ und $\mathfrak{F}_\varrho$ ein Fuß ist, so ist für jedes ϱ entweder $\mathfrak{P}_\varrho = \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{P}_\varrho = \mathfrak{F}_\varrho$.

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\mathfrak{P}_\varrho = \mathfrak{F}_\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, l$; $\mathfrak{P}_\varrho = \mathfrak{E}$ für $\varrho > l$.

Es sei

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{C},$$

wo $\mathfrak{C}$ zur Abkürzung für das Produkt der von $\mathfrak{F}_1$ verschiedenen Füße der Darstellung gesetzt sei. Jedes Element $F_1 < \mathfrak{F}_1$ kommt in $\mathfrak{P}$ nach Hilfssatz 5 n mal als Komponente vor, wo n die Ordnung von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C})$ ist. Es ist

$$\text{Ord } \mathfrak{P} = \text{Ord } \mathfrak{F}_1 \cdot n.$$

Nun ist aber $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) <^i \mathfrak{G}$. $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C})$ ist von kleinerer Ordnung als $\mathfrak{P}$, da Ord $\mathfrak{F}_1 > 1$. Wäre also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) \neq \mathfrak{E}$, so besäße $\mathfrak{P}$ die echte Untergruppe $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) <^i \mathfrak{G}$, was der Definition des Fußes widersprechen würde. Es ist also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) = \mathfrak{E}$; $n = 1$, d. h. jedes $F_1 < \mathfrak{F}_1$ kommt nur als Komponente eines einzigen Elementes von $\mathfrak{P}$ vor. Das gilt für alle Komponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_l$. D. h. sämtliche Komponenten von $\mathfrak{P}$ sind zueinander und zu $\mathfrak{P}$ eindeutig isomorph:

$$\mathfrak{F}_1 \sim \mathfrak{F}_2 \sim \cdots \mathfrak{F}_l \sim \mathfrak{P}.$$

$\sim$ sei das Zeichen des eindeutigen Isomorphismus, für Elemente das Zeichen der eindeutig isomorphen Zuordnung. Betrachtet man irgend zwei Komponenten, z. B. $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so ist jedem Elemente von $\mathfrak{F}_1$ eindeutig ein Element von $\mathfrak{F}_2$ zugeordnet, das mit ihm zusammen als Komponente eines wohlbestimmten Elementes von $\mathfrak{P}$ vorkommt. Liegen andererseits zwei isomorphe Füße vor, und bildet man durch Multiplikation je zweier einander zugeordneter Elemente eine Untergruppe $\mathfrak{P} < \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 < \mathfrak{G}$, so braucht $\mathfrak{P}$ noch keine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$ zu sein. Damit dies der Fall sei, muß noch eine weitere Bedingung erfüllt sein. Es dürfen nämlich die zusammengehörigen Komponenten eines Elementes von $\mathfrak{P}$ durch Transformation mit einem beliebigen Elemente von $\mathfrak{G}$ nicht auseinandergerissen werden, sondern sie müssen wieder in zusammengehörige Komponenten eines wohlbestimmten Elementes von $\mathfrak{P}$ übergehen.

Wir wollen das „*das Prinzip der unzerstörbaren Zuordnung*“ nennen. Es müssen also die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ einander eindeutig so zugeordnet sein, daß, wenn

$$F_1 < \mathfrak{F}_1, \quad F_2 < \mathfrak{F}_2,$$
$$F_1 \approx F_2$$

und G ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$ ist, auch

$$G F_1 G^{-1} \approx G F_2 G^{-1}$$

wird. Eine solche Zuordnung heiße „*kohärente Zuordnung*“. Die Füße $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heißen *kohärent*. Es sei $\approx$ das Zeichen der kohärenten Zuordnung. Sämtliche Komponenten von $\mathfrak{P}$ sind untereinander und zu $\mathfrak{P}$ kohärent.

Insbesondere müssen hierbei diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, die die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ bei der Transformation in Ruhe lassen, oder mit anderen Worten, die mit allen Elementen von $\mathfrak{F}_1$ vertauschbar sind, auch mit allen Elementen von $\mathfrak{F}_2$ vertauschbar sein. Die Gruppen der Automorphismen (Isomorphismen mit sich selbst), die durch die Transformation mit Elementen von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ hervorgerufen werden, müssen übereinstimmen.

Es soll gezeigt werden, daß nur kommutative Füße miteinander kohärent sein können.

Satz 2: *Nicht kommutative Füße können miteinander niemals kohärent sein.* (*Auch nicht, wenn sie isomorph sind.*)

Beweis: Es seien $\mathfrak{F}_1 \sim \mathfrak{F}_2$ zwei isomorphe, nicht kommutative Füße. Man bilde die Gruppe $\mathfrak{P}$, deren Elemente je zwei Komponenten besitzen, die durch den gegebenen Isomorphismus einander zugeordnet sind.

$$P < \mathfrak{P}; \quad P = F_1 \times F_2; \quad F_1 \sim F_2.$$

Es sei $F_1' < \mathfrak{F}_1$; die Elemente F_1 und F_1' seien nicht vertauschbar, d. h. es sei

$$F_1'' = F_1' F_1 F_1'^{-1} \neq F_1.$$

Man bilde

$$F_1' P F_1'^{-1} = F_1' F_1 F_1'^{-1} \times E F_2 E^{-1} = F_1'' \times F_2.$$

Dieses Element kommt aber nicht in $\mathfrak{P}$ vor, da F_2 dem Element F_1 zugeordnet war und nicht dem Element F_1'', $F_1 \neq F_1''$, und jede Komponente nur in einem Element von $\mathfrak{P}$ auftritt.

$\mathfrak{P}$ läßt sich wohl bilden, ist aber nicht invariant in $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$, also auch nicht in $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{F}_1$ nicht isomorph zu $\mathfrak{F}_2$, so läßt sich $\mathfrak{P}$ nicht einmal bilden. Es können mithin nicht kommutative Füße niemals kohärent sein.

Es sei der Sockel $\mathfrak{S}$ als direktes Produkt von Füßen dargestellt.

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_r.$$

Man fasse sämtliche untereinander kohärenten Füße in Systeme zusammen. Zwei Füße mögen hier als kohärent angesehen werden, wenn zwischen ihnen eine kohärente Zuordnung möglich ist. Zu beachten ist hierbei, daß Kohärenz eine transitive Beziehung ist. Die entstehenden Systeme mögen die „*Kohärenzsysteme der Zerlegung*“ heißen. Das Produkt der Füße eines Kohärenzsystems heiße „*Kohärente*“. Der Sockel $\mathfrak{S}$ ist also das direkte Produkt von Kohärenten.

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_s.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die Kohärenten unabhängig von der gewählten Zerlegung von $\mathfrak{S}$ in Füße sind.

Satz 3: *Der Sockel einer Gruppe ist identisch eindeutig als direktes Produkt von Kohärenten darstellbar.*

Beweis: Es sei der Sockel

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_r = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_t$$

auf zweierlei Art als direktes Produkt von Füßen dargestellt. Es sei ferner

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_s = \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2 \times \cdots \times \mathfrak{L}_u$$

die Zusammenfassung der ersten bzw. der zweiten Zerlegung in Kohärenten. Es sei $\mathfrak{P}_1 < \mathfrak{L}_1$. Man zerlege die Elemente von $\mathfrak{P}_1$ in der ersten Zerlegung in Komponenten. Diese sind nach Satz 1 sämtlich untereinander und zu $\mathfrak{P}_1$ kohärent, gehören also einer Kohärente $\mathfrak{K}_1$ der ersten Zerlegung an; also $\mathfrak{P}_1 < \mathfrak{K}_1$. Es sei $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{K}_1$; also $\mathfrak{P}_1 \approx \mathfrak{F}_1$. Es sei ferner $\mathfrak{P}_2 \approx \mathfrak{P}_1$, mithin $\mathfrak{P}_2 < \mathfrak{L}_1$. Aus $\mathfrak{P}_2 \approx \mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1 \approx \mathfrak{F}_1$ folgt $\mathfrak{P}_2 \approx \mathfrak{F}_1$, wie sich unmittelbar aus der Definition der Kohärenz ergibt, also $\mathfrak{P}_2 < \mathfrak{K}_1$. Also sind sämtliche Faktoren von $\mathfrak{L}_1$ in $\mathfrak{K}_1$ enthalten, mithin $\mathfrak{L}_1 < \mathfrak{K}_1$; umgekehrt läßt sich aber auch zeigen, daß $\mathfrak{K}_1 < \mathfrak{L}_1$; mithin $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{L}_1$. D. h. jede Kohärente einer Zerlegung kommt auch unter den Kohärenten jeder anderen Zerlegung vor. Die Zerlegung des Sockels in Kohärenten ist also identisch eindeutig.

Es sei f die Ordnung eines Fußes $\mathfrak{F}_1$, ϱ die Anzahl der ihm kohärenten Füße in einer bestimmten direkten Zerlegung des Sockels, k die Ordnung der Kohärente $\mathfrak{K}_1$. Dann ist

$$k = f^{\varrho}.$$

Da die Kohärente, wie soeben bewiesen, in jeder anderen Zerlegung wieder auftritt, in dieser Zerlegung das direkte Produkt von Füßen ist, die zu den vorigen kohärent sind, also ebenfalls die Ordnung f haben, so müssen sie auch in der zweiten Zerlegung in der Anzahl ϱ auftreten. Die Anzahl der Füße, die als direkte Faktoren von $\mathfrak{K}$ auftreten, ist also von der Wahl der speziellen Zerlegung unabhängig, und soll der „*Rang der Kohärente*“ heißen. Die Anzahl aller Faktoren einer direkten Zerlegung des Sockels in Füße ist also bei allen Zerlegungen dieselbe, nämlich gleich der Summe der Ränge der einzelnen Kohärenten; sie möge der „*Rang des Sockels*“ heißen. Es ergibt sich:

Satz 4: *Ist der Sockel einer Gruppe auf zweierlei Art als direktes Produkt von Füßen dargestellt, so sind diese, von der Reihenfolge abgesehen, paarweise einander kohärent.*

Da nicht kommutative Füße nach Satz 2 nicht kohärent sein können, so kann ein nicht kommutativer Fuß in keiner Zerlegung Komponenten aus mehreren Füßen besitzen, muß also unmittelbar in der Zerlegung vorkommen. Es ergibt sich:

Satz 5: *Sämtliche nicht kommutativen Füße einer Gruppe kommen in jeder Darstellung des Sockels als direktes Produkt von Füßen vor.*

Nicht kommutative Füße sind selbst Kohärenten.

Satz 3 a: *Ist*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_s,$$

der Sockel von $\mathfrak{G}$, *sind* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_s$ *die Kohärenten, und ist* $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} < \mathfrak{S}$, *so ist*

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_1) \times (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_2) \times \cdots \times (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_s).$$

Beweis: Man bezeichne die rechte Seite der Behauptung vorläufig mit $\overline{\mathfrak{C}}$. Da $(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_\sigma) < \mathfrak{C}$, so ist $\overline{\mathfrak{C}} < \mathfrak{C}$. Nach Satz 1 a ist $\mathfrak{C}$ das direkte Produkt geeignet gewählter Füße von $\mathfrak{G}$. Es sei $\mathfrak{F} < \mathfrak{C}$ ein Fuß von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{F}$ ist in einer bestimmten Kohärente enthalten. Es sei $\mathfrak{F} < \mathfrak{K}_\sigma$, also $\mathfrak{F} < (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_\sigma)$. Es ergibt sich

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots < \overline{\mathfrak{C}},$$

mithin $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{C}}$, was zu beweisen war.

Satz 4 a: *Ist* $\mathfrak{S}$ *der Sockel von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{C} < \mathfrak{S}$, *und ist* $\mathfrak{C}$ *auf zweierlei Art als direktes Produkt geeigneter Füße von* $\mathfrak{G}$ *dargestellt, so sind diese, von der Reihenfolge abgesehen, paarweise einander kohärent.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots$$

eine Darstellung von $\mathfrak{C}$ als direktes Produkt von Füßen von $\mathfrak{G}$. Man fasse in dieser Darstellung sämtliche Füße, die $< \mathfrak{K}_1$, also untereinander kohärent sind, zu einem Faktor $\overline{\mathfrak{K}}_1$ zusammen, ebenso $\overline{\mathfrak{K}}_2, \ldots$ Es wird

$$\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{K}}_1 \times \overline{\mathfrak{K}}_2 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{K}}_s .$$

Es ist $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma < \mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma < \mathfrak{K}_\sigma$, mithin $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma < (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_\sigma)$. Wäre nun ein $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma \neq (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_\sigma)$, so würde die letzte Darstellung von $\mathfrak{C}$ weniger Elemente ergeben, als die in Satz 3 a gegebene. Es muß also $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}_\sigma)$, von der speziellen Wahl der Darstellung unabhängig sein. Es sei $\overline{k}_\sigma = \text{Ord } \overline{\mathfrak{K}}_\sigma$, f die übereinstimmende Ordnung der in $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma$ enthaltenen, kohärenten, also isomorphen Füße. Es ist

$$\overline{k}_\sigma = f^{\overline{\varrho}_\sigma},$$

wo $\overline{\varrho}_\sigma$ die Anzahl der aus kohärenten Füßen bestehenden direkten Faktoren von $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma$ bedeutet. Da $\overline{k}_\sigma$ und f von der speziellen Wahl der Zerlegung unabhängig sind, ist auch $\overline{\varrho}_\sigma$ für alle Zerlegungen dieselbe Zahl. Die Anzahl der untereinander kohärenten Faktoren ist also für jede Zerlegung dieselbe. Damit ist Satz 4 a bewiesen.

Die Zahl $\overline{\varrho}_\sigma$ heiße der *Rang* von $\mathfrak{C}$ *in bezug auf die Kohärente* $\mathfrak{K}_\sigma$. Die Summe der $\overline{\varrho}_\sigma$ über alle Kohärenten ist die für alle Zerlegungen gleiche Gesamtzahl der aus Füßen von $\mathfrak{G}$ bestehenden direkten Faktoren von $\mathfrak{C}$; sie möge der *Rang* von $\mathfrak{C}$ *in* $\mathfrak{S}$ heißen. Für invariante Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die echte Untergruppen des Sockels sind, ist der Rang $\bar{r}$ stets kleiner als der Rang des Sockels r. Für direkte Komplementärfaktoren $\mathfrak{S}_1 <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}_2 <_i \mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}$, ist

$$r_1 + r_2 = r .$$

§ 3. Die Einteilung der Füße in drei Arten.

Wir teilen die Füße ein in *Füße* I., II., III. *Art*. Die Füße I. und II. Art sind kommutativ, die Füße III. Art nicht. Die Füße I. Art gehören dem Zentrum von $\mathfrak{G}$ an, d. h. sie bestehen aus invarianten Elementen von $\mathfrak{G}$; die Füße II. und III. Art gehören nicht dem Zentrum an.

Die Füße I. Art sind zyklisch von Primzahlordnung; sie können keine echten Untergruppen besitzen; denn jede echte Untergruppe bestünde aus invarianten Elementen von $\mathfrak{G}$, wäre also selbst invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Sind zwei Füße I. Art von der gleichen Primzahlordnung, so sind sie stets als kohärent anzusehen, da sie durch Transformation mit einem Elemente $G < \mathfrak{G}$ ungeändert bleiben, die einmal gewählte Zuordnung also niemals gestört werden kann. Füße III. Art sind niemals kohärent; interessant ist der Begriff der Kohärenz lediglich für die Füße II. Art.

Es sei zwischen zwei Füßen II. Art $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ eine kohärente Zuordnung gegeben; wie findet man alle kohärenten Zuordnungen?

Es sei $F_1 < \mathfrak{F}_1$, $F_2 < \mathfrak{F}_2$. Man betrachte einen beliebigen Automorphismus von $\mathfrak{F}_1$ als Permutation der Elemente von $\mathfrak{F}_1$ und bezeichne mit $a(F_1)$ das durch den Automorphismus an die Stelle von F_1 tretende Element von $\mathfrak{F}_1$. Der durch Transformation mit einem Elemente $G < \mathfrak{G}$ hervorgerufene Automorphismus wird entsprechend mit $g(F_1)$ bezeichnet, so daß

$$G F_1 G^{-1} = g(F_1).$$

Die ursprünglich gegebene kohärente Zuordnung drückt sich durch

$$F_1 \sim F_2, \quad g(F_1) \sim g(F_2)$$

aus. Es soll eine neue Zuordnung gefunden werden, deren Zeichen $\curvearrowright$ sei, dadurch daß F_1 einem geeignet gewählten Automorphismus unterworfen wird, so daß die neue Zuordnung wieder kohärent wird. Ein solcher Automorphismus heiße $b(F_1)$. Es ist

$$b(F_1) \curvearrowright F_2.$$

Diese Zuordnung muß durch Transformation mit irgendeinem Elemente G von $\mathfrak{G}$ erhalten bleiben, d. h. es muß

$$g(b(F_1)) \curvearrowright g(F_2)$$

werden; andererseits entspricht durch die $\curvearrowright$-Zuordnung dem Elemente $g(F_2)$

$$b(g(F_1)) \curvearrowright g(F_2).$$

Es muß also

$$b(g(F_1)) = g(b(F_1))$$

sein, d. h. die Automorphismen b und g müssen miteinander vertauschbare Permutationen sein. Ist umgekehrt b ein Automorphismus, der mit allen durch die Elemente G bewirkten Automorphismen g vertauschbar ist, ordnet man einander zu

$$F_2 \text{ und } b(F_1)$$

und transformiert man mit g, so erhält man

$$g(F_2) \text{ und } g(b(F_1)) = b(g(F_1)),$$

also wieder einander bereits zugeordnete Elemente. Die Zuordnung ist also eine kohärente. Man hat mithin die Gruppe $\mathfrak{A}_a$ aller Automorphismen von $\mathfrak{F}_1$ zu bestimmen, in dieser die Untergruppe $\mathfrak{A}_g$ der durch Transformation mit den Elementen $G < \mathfrak{G}$ bewirkten Automorphismen von $\mathfrak{F}_1$; bezeichnet $\mathfrak{A}_b$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{A}_a$, die mit allen Elementen von $\mathfrak{A}_g$ vertauschbar sind, so erhält man alle möglichen kohärenten Zuordnungen zwischen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ aus einer einzigen, indem man die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ den Automorphismen von $\mathfrak{A}_b$ unterwirft. Wir werden auf diese Vertauschbarkeitsbedingung noch einmal zurückkommen, nachdem wir im nächsten Paragraphen die Konstitution der Füße kennen gelernt haben werden. Die bisherigen Betrachtungen benutzten nur die Definition des Fußes, ohne seine Konstitution zu kennen.

§ 4. Über die Konstitution der Füße.

Der Fuß eines Fußes heiße „*Huf*“. Es sei $\mathfrak{H} < \mathfrak{F} < \mathfrak{G}$. Es sei $\mathfrak{F}$ Fuß von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ein in $\mathfrak{F}$ enthaltener Huf. Es seien

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\gamma$$

die sämtlichen zu $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ konjugierten Gruppen, die ebenfalls Hufe sind, da die Eigenschaft, Fuß von $\mathfrak{F}$ zu sein, bei der Transformation erhalten bleibt; deren Produkt ist invariant in $\mathfrak{G}$, also gleich $\mathfrak{F}$. Man bilde $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$; $\mathfrak{H}_3$ kann in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ enthalten sein; wenn nicht, bilde man $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \mathfrak{H}_3$; so fahre man fort, lasse jeden Huf weg, der im Produkt der vorangehenden bereits enthalten ist, und erhält $\mathfrak{F}$ dargestellt als direktes Produkt geeignet gewählter Hufe, die zu einem Hufe $\mathfrak{H}$ konjugiert sind. Bei passender Wahl der Bezeichnung ist also

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_\delta,$$

wo $\delta \leqq \gamma$.

Besäße $\mathfrak{H}_1$ eine echte invariante Untergruppe, so wäre diese nach Hilfssatz 1 auch invariante Untergruppe von $\mathfrak{F}$; also wäre $\mathfrak{H}_1$ nicht Fuß von $\mathfrak{F}$; mithin kann $\mathfrak{H}_1$ überhaupt keine echte invariante Untergruppe besitzen. Die Hufe sind mithin einfache Gruppen. Ein Fuß ist das direkte Produkt einander isomorpher einfacher Gruppen [3]). Die Anzahl der direkten Faktoren δ heiße der „*Hufrang*“ des Fußes. Die Füße I. Art besitzen

[3]) Siehe *Burnside*, l. c. Anm. 2.

stets nur einen Huf, sind also vom Hufrang 1; die Füße II. Art sind das direkte Produkt von isomorphen kommutativen einfachen Gruppen, d. h. von zyklischen Gruppen der Primzahlordnung p; sämtliche Elemente außer dem Einheitselement sind also von der Ordnung p.

Die Füße, die Kohärenten und der Sockel sind also direkte Produkte einfacher Gruppen. Ist eine Gruppe das direkte Produkt einfacher Gruppen, so sind ihre Faktoren Füße, also ist sie mit ihrem eigenen Sockel identisch. Speziell ist also der Sockel eines Fußes mit dem Fuß identisch. Wir können also die Sätze des vorigen Paragraphen über den Sockel auf den Fuß anwenden. Aus Satz 5 folgt:

Satz 6: *Sämtliche Hufe eines Fußes III. Art kommen in jeder Darstellung des Fußes als direktes Produkt von Hufen vor, d. h. es gibt, von der Reihenfolge abgesehen, nur eine einzige solche Darstellung; die Anzahl der konjugierten Hufe ist also* $\gamma = \delta$.

Dies ist eine Eigenschaft, die nur von der Konstitution des Fußes III. Art selbst abhängt, also für alle direkten Produkte einander isomorpher einfacher Gruppen von zusammengesetzter Ordnung gilt. Tatsächlich wird auch von dem Isomorphismus der direkten Faktoren untereinander gar kein Gebrauch gemacht. Wir erhalten als Folgerung aus Satz 5 den allgemeineren Satz:

Satz 7: *Ein direktes Produkt von einfachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung besitzt keine anderen Füße, als die Faktoren, aus denen es aufgebaut ist, also speziell auch keine anderen direkt unzerlegbaren Faktoren, ist also, von der Reihenfolge abgesehen, nur auf eine einzige Art in direkt unzerlegbare Faktoren zerlegbar* [4]).

Es gilt weiter:

Satz 8: *Ein direktes Produkt von einfachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung besitzt keine anderen invarianten Untergruppen als die durch Weglassung eines Teiles der gegebenen direkten Faktoren entstehenden direkten Produkte.*

Beweis: Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_r,$$

wo $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_r$ einfache Gruppen zusammengesetzter Ordnung sind. Es sei $\mathfrak{C} <_i \mathfrak{G}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ihr eigener Sockel, also ist nach Satz 1 a $\mathfrak{C}$ als direktes Produkt geeignet gewählter Füße darstellbar. Da aber nach Satz 7 keine anderen Füße von $\mathfrak{G}$ als $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_r$ existieren, so ist $\mathfrak{C}$ das Produkt eines Teiles dieser Füße. Bei passender Wahl der Bezeichnung ist

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \cdots \times \mathfrak{F}_s,$$

also gilt Satz 8 allgemein.

Korollar: *Jede maximale invariante Untergruppe eines direkten Produktes einfacher Gruppen zusammengesetzter Ordnung entsteht durch Weglassung eines einzigen Faktors.*

Unter einer Kompositionsreihe einer Gruppe $\mathfrak{G}$ versteht man bekanntlich eine Reihe von Untergruppen

$$\mathfrak{G} \,i\!>\, \mathfrak{D}_1 \,i\!>\, \mathfrak{D}_2 \,i\!>\, \cdots \,i\!>\, \mathfrak{D}_n \,i\!>\, \mathfrak{E},$$

derart daß sich die Reihe nicht durch Einschalten weiterer Untergruppen ergänzen läßt. Unter einer Hauptreihe versteht man eine Reihe, die den gleichen Bedingungen genügt, wobei aber außerdem noch verlangt wird, daß alle Untergruppen $\mathfrak{D}_\nu <_i \mathfrak{G}$. Bildet man die Faktorgruppen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern $\frac{\mathfrak{D}_{\nu-1}}{\mathfrak{D}_\nu}$, so sind diese

[4]) Diese letzte Tatsache ist ein spezieller Fall des Satzes, daß eine Gruppe, die außer E keine invarianten Elemente besitzt (deren Zentrum gleich $\mathfrak{E}$ ist), identisch eindeutig in direkte Faktoren zerlegbar ist. Siehe l. c. Anm. 1.

für zwei Kompositionsreihen einer Gruppe, von der Reihenfolge abgesehen, nach bekannten Sätzen paarweise einander isomorph. Der gleichlautende Satz gilt bekanntlich für Hauptreihen [5]). $\mathfrak{D}_1$ ist in beiden Arten Reihen eine maximale invariante Untergruppe. $\mathfrak{D}_n$ ist in einer Kompositionsreihe eine einfache Gruppe, in einer Hauptreihe ein Fuß. $\frac{\mathfrak{D}_{\nu-1}}{\mathfrak{D}_\nu}$ ist für Kompositionsreihen einfach. Für Hauptreihen läßt sich $\frac{\mathfrak{D}_{\nu-1}}{\mathfrak{D}_\nu}$ als letztes Glied der Hauptreihe für $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$, d. h. als Fuß von $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}_\nu}$ auffassen. $\frac{\mathfrak{D}_{\nu-1}}{\mathfrak{D}_\nu}$ ist also für Hauptreihen das direkte Produkt isomorpher einfacher Gruppen.

Bildet man für ein direktes Produkt einfacher Gruppen zusammengesetzter Ordnung eine Hauptreihe, so muß man nach Satz 8 die direkten Faktoren in irgendeiner Reihenfolge fortlassen. Die Quotienten der Hauptreihe sind einfache Gruppen. Die Hauptreihe ist also gleichzeitig Kompositionsreihe. Es fragt sich, ob umgekehrt für direkte Produkte einfacher Gruppen zusammengesetzter Ordnung jede Kompositionsreihe eine Hauptreihe ist [6]). Die Frage ist zu bejahen. Denn da die maximale invariante Untergruppe von derselben Konstitution ist, erhält man auch in der Kompositionsreihe $\mathfrak{D}_2$ aus $\mathfrak{D}_1$ nur durch Weglassung eines direkten Faktors; also ist $\mathfrak{D}_2 <^i \mathfrak{G}$, und so fort. Man erhält also als Kompositionsreihen keine anderen Reihen als die Hauptreihen.

Ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von r einfachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung, so ist die Anzahl der unzerlegbaren direkten Faktoren, die mit den Füßen von $\mathfrak{G}$ übereinstimmen, r, die Anzahl der maximalen invarianten Untergruppen ebenfalls r, die Anzahl aller invarianten Untergruppen, die mit den direkten Faktoren übereinstimmen, (einschließlich $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$) ist 2^r; die Anzahl der Kompositionsreihen, die mit den Hauptreihen übereinstimmen, ist $r!$.

Diese Sätze interessieren uns hauptsächlich in ihrer Anwendung auf die Füße III. Art, die das direkte Produkt einander isomorpher einfacher Gruppen zusammengesetzter Ordnung (der Hufe) sind.

§ 5. Über die Automorphismen der Füße.

Ein Automorphismus einer Gruppe wird zunächst dargestellt als Permutation ihrer Elemente, die die Eigenschaft hat, daß sie mit den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad \text{auch} \quad \begin{pmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{pmatrix} \quad \text{bewirkt.}$$

Da aber ein Element eines direkten Produktes eindeutig durch seine Komponenten dargestellt wird, genügt für den Automorphismus eines direkten Produktes die Angabe, in welche Elemente die Elemente der Faktoren übergehen.

Für einen Fuß II. Art $\mathfrak{F}$ von der Ordnung p^δ genügt es, eine Basis anzugeben, deren sämtliche Elemente von der Ordnung p sind, und anzugeben, in welche Elemente sie durch den Automorphismus übergehen. Bekanntlich läßt sich der Automorphismus auffassen als ganzzahlige lineare Substitution mod p in δ Elementen, deren Determinante $\not\equiv 0 \bmod p$. Die Gruppe der Automorphismen stimmt mit der Gruppe dieser Substitutionen überein. Diese Gruppe bezeichnen wir in Übereinstimmung mit dem Schluß von § 3 mit $\mathfrak{A}_a$; dann bilden die durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}$ bewirkten Automorphismen eine Untergruppe $\mathfrak{A}_g < \mathfrak{A}_a$. Eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}_a$ ist dann und nur dann als

---

[5]) Siehe z. B. *Speiser*, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1923), S. 22—25.

[6]) Die Frage wurde von *Frobenius* in einer Vorlesung (für minimale invariante Untergruppen) aufgeworfen. Für kommutative Füße ist sie trivial, da jede Untergruppe einer kommutativen Gruppe invariant, also jede Kompositionsreihe eine Hauptreihe ist.

Gruppe $\mathfrak{A}_g$ zulässig, wenn sie irreduzibel ist, d. h. wenn es nicht möglich ist, $\overline{\mathfrak{A}}$ durch eine Substitution von $\mathfrak{A}_a$ so zu transformieren, $A_a < \mathfrak{A}_a$, $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = A_a \overline{\mathfrak{A}} A_a^{-1}$, daß seine Substitutionen zerfallen; d. h. es darf nicht möglich sein, zu einer anderen Basis so überzugehen, daß ein Teil der neuen Basiselemente durch die Substitutionen von $\overline{\mathfrak{A}}$ nur in ihre eigenen linearen Verbindungen übergeführt werden. Eine solche Teilbasis würde eine echte Untergruppe von $\mathfrak{F}$ bestimmen, die in $\mathfrak{G}$ invariant ist, was unzulässig ist. Umgekehrt würde die Basis einer derartigen echten Untergruppe von $\mathfrak{F}$, die in $\mathfrak{G}$ invariant ist, als Teilbasis von $\mathfrak{F}$ sich zur Basis von $\mathfrak{F}$ ergänzen lassen und zu einer zerfallenden Substitutionsgruppe von Automorphismen Anlaß geben. Wenn also $\overline{\mathfrak{A}}$ irreduzibel ist, so kann keine echte Untergruppe von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$ invariant sein, also ist $\mathfrak{F}$ Fuß. Eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}_a$ ist also dann und nur dann als $\mathfrak{A}_g$ zulässig, wenn sie irreduzibel ist [7]).

In § 3 war nach *allen* kohärenten Zuordnungen zwischen zwei Füßen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ gefragt, vorausgesetzt, daß *eine* kohärente Zuordnung gegeben ist. Hierzu mußte die Gruppe $\mathfrak{A}_b$ derjenigen Elemente von $\mathfrak{A}_a$ aufgesucht werden, die mit allen Elementen von $\mathfrak{A}_g$ vertauschbar sind. Zu diesen gehören die Multiplikationen, d. h. diejenigen Substitutionen, die aus der identischen Substitution durch Multiplikation mit einer der $p-1$ Zahlen $q = 1, 2, 3 \ldots, p-1$ entstehen, wo $q \not\equiv 0 \bmod p$, die die Gruppe $\mathfrak{Q}$ bilden. Diese sind mit allen Substitutionen von $\mathfrak{A}_a$, also gewiß mit allen Substitutionen von $\mathfrak{A}_g$ vertauschbar. In der Sprache der abstrakten Gruppentheorie sind das diejenigen Automorphismen, die durch gleichzeitiges Potenzieren aller Elemente von $\mathfrak{F}_1$ mit derselben zu p teilerfremden Zahl q entstehen. Es ist also stets $\mathfrak{Q} < \mathfrak{A}_b$. Es kann aber $\mathfrak{A}_b$ mehr Elemente enthalten als $\mathfrak{Q}$. Es bezeichne A_g die Matrix einer Substitution von $\mathfrak{A}_g$. Wenn die Matrix A_g zerfällt, so sei $\delta = \varepsilon + \zeta$,

$$A_g = \begin{pmatrix} A_{\varepsilon\varepsilon} & 0 \\ A_{\zeta\varepsilon} & A_{\zeta\zeta} \end{pmatrix},$$

wo $A_{\varepsilon\varepsilon}$, $A_{\zeta\zeta}$ quadratische Matrizen von ε bzw. ζ Zeilen; $A_{\zeta\varepsilon}$ und 0 bezeichnen rechteckige Matrizen. E_δ bezeichne die Einheitsmatrix mit δ Elementen. Man bilde die charakteristische Gleichung. Es ist

$$|A_g + x E_\delta| = |A_{\varepsilon\varepsilon} + x E_\varepsilon| \cdot |A_{\zeta\zeta} + x E_\varepsilon|.$$

Die charakteristische Gleichung einer reduziblen Matrix ist also reduzibel. Man kann aber bekanntlich leicht eine Matrix bilden, deren charakteristische Gleichung eine vorgegebene ist, für die man eine mod p irreduzible Gleichung vom Grade δ wähle:

$$\varphi(x) = x^\delta + a_1 x^{\delta-1} + \cdots + a_\delta = 0$$

$$A_g = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_2 & 0 & -1 & 0 \ldots 0 \\ a_3 & 0 & 0 & -1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_\delta & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist, wie man sich durch Entwickeln nach den Elementen der ersten Spalte überzeugt:

$$|A_g + x E_\delta| = \varphi(x).$$

Die Matrix A_g ist somit irreduzibel. Wählt man für $\mathfrak{A}_g$ die zyklische Gruppe der Potenzen von A_g, so ist sie irreduzibel, da sonst die Matrix A_g reduzibel sein müßte. Die Gruppe $\mathfrak{A}_g$ ist als zyklische Gruppe kommutativ, d. h. jedes ihrer Elemente ist mit jedem

[7]) Beispiele sind das Holomorph (siehe *Burnside*, l. c. Anm. 2, S. 87—88) von $\mathfrak{F}$ und dessen $\mathfrak{F}$ enthaltende Untergruppen.

vertauschbar; mithin ist $\mathfrak{A}_g < \mathfrak{A}_b$. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{A}_b$ auch andere Elemente als Multiplikationen enthalten kann.

Ein Fuß III. Art ist das direkte Produkt von δ untereinander isomorphen einfachen Gruppen zusammengesetzter Ordnung, den Hufen:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_\delta .$$

Die Ordnung der Hufe $\mathfrak{H}_\nu$ sei h; die von $\mathfrak{F}$ sei f. Dann ist $f = h^\delta$. Nach dem im Anfange des Paragraphen Gesagten genügt es, anzugeben, in welche Elemente die Elemente der Komponenten $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\delta$ durch den Automorphismus übergehen. Da aber nach Satz 6 außer den $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\delta$ keine anderen Hufe existieren, können die Elemente der $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\delta$ nur untereinander permutiert werden. Läßt man das bei allen Automorphismen ungeändert bleibende Einheitselement fort, so läßt sich die Gruppe der Automorphismen darstellen durch eine imprimitive Permutationsgruppe von $(h-1)\,\delta$ Symbolen; diese zerfallen in δ Systeme zu je $h-1$ Symbolen, die den von E verschiedenen Elementen je eines der δ Hufe entsprechen. Jede Permutation, die einen Automorphismus darstellt, permutiert die Elemente eines Systems entweder unter sich oder führt sie gleichzeitig in die Elemente eines bestimmten anderen Systems über. Schreibt man für jedes System, das einem bestimmten Hufe, genauer dessen $h-1$ Elementen mit Ausnahme des Einheitselements, entspricht, nur ein einziges Zeichen, das wir Grobsymbol nennen wollen, und notiert man lediglich, wie ein Automorphismus die Grobsymbole permutiert, ohne sich um das Schicksal der einzelnen Symbole zu kümmern, so erhält man eine Permutation der δ Grobsymbole, die wir die Grobpermutation nennen wollen. Damit keine echte Untergruppe von $\mathfrak{F}$ invariant in $\mathfrak{G}$ sei, ist notwendig, daß die Gruppe der Grobpermutationen transitiv sei. Wäre sie nämlich intransitiv, so würde eine Teil der Grobsymbole nur unter sich permutiert werden; das direkte Produkt der entsprechenden Hufe wäre eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Besitzt andererseits $\mathfrak{F}$ eine echte Untergruppe $\overline{\mathfrak{F}}$, so daß $\mathfrak{F} <_i \mathfrak{G}$, so muß die Gruppe der Grobpermutationen intransitiv sein; denn nach Satz 8 ist $\overline{\mathfrak{F}}$ das direkte Produkt eines Teiles der $\mathfrak{H}_\nu$; bei passender Wahl der Bezeichnung sei

$$\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_\varepsilon ,$$

wo $\varepsilon < \delta$. Dann muß die Gruppe $\mathfrak{A}_g$ der Automorphismen, die $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$ erleidet, $\mathfrak{F}$ in sich überführen, d. h. sie muß $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \ldots, \mathfrak{H}_\varepsilon$ ineinander überführen, die entsprechenden Grobsymbole nur untereinander vertauschen. Die Gruppe der Grobpermutationen wäre also intransitiv. Ist die Gruppe der Grobpermutationen von $\mathfrak{A}_g$ transitiv, so kann $\mathfrak{F}$ keine echte Untergruppe besitzen, die invariant ist in $\mathfrak{G}$, also ist $\mathfrak{F}$ ein Fuß von $\mathfrak{G}$.

Bei einer Gruppe, die außer E keine invarianten Elemente enthält, deren Zentrum $= \mathfrak{E}$ ist, ist die Gruppe der inneren Automorphismen der gegebenen Gruppe eindeutig isomorph. Innere Automorphismen sind solche, die durch Transformation mit Elementen der Gruppe selbst bewirkt werden können. Wenn $\mathfrak{F}$ von III. Art, so kann es kein Zentrum $\neq \mathfrak{E}$ enthalten, denn dieses wäre $\neq \mathfrak{F}$ und $<_i \mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}_g$ enthält somit stets eine Untergruppe $\mathfrak{A}_i$ die zu $\mathfrak{F}$ eindeutig isomorph ist.

Satz 9: *Es gilt für alle Gruppen $\mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{A}_i <_i \mathfrak{A}_a$, wo $\mathfrak{A}_i$ die Gruppe der inneren, $\mathfrak{A}_a$ sämtlicher Automorphismen von $\mathfrak{F}$ sei.*

Beweis: Es werde A_i durch Transformation mit dem Elemente $I < \mathfrak{F}$ hervorgebracht. Es sei $F < \mathfrak{F}$, $A_a < \mathfrak{A}_a$, A_i führe F in $i(F)$, A_a führe F in $a(F)$ über. Es ist

$$i(F) = IFI^{-1};$$

$$a\,i\,a^{-1}(F) = a(I \cdot a^{-1}(F) \cdot I^{-1}) = a(I) \cdot a(a^{-1}(F)) \cdot a(I^{-1}) = J \cdot F \cdot J^{-1},$$

worin zur Abkürzung $a(I) = J$ gesetzt ist. Da aber $J < \mathfrak{F}$, so ist $aia^{-1} = j$ ein innerer Automorphismus, mithin ist $\mathfrak{A}_i <_i \mathfrak{A}_a$.

Hieraus folgt, daß wenn $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{A}_g < \mathfrak{A}_a$ ist, auch $\mathfrak{A}_i <_i \mathfrak{A}_g$.

Da nach dem obigen ein Element $A_a < \mathfrak{A}_a$ in $\mathfrak{A}_i$ durch Transformation den gleichen Automorphismus hervorruft wie durch Permutation in $\mathfrak{F}$, so ist, wenn $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{A}_g < \mathfrak{A}_a$ und die Gruppe der Grobpermutationen von $\mathfrak{A}_g$ transitiv ist, $\mathfrak{A}_i$ Fuß von $\mathfrak{A}_g$; $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{A}_i$; $\mathfrak{A}_g$ ist also auch eine mögliche Gruppe von Automorphismen, die der Fuß III. Art $\mathfrak{F}$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ erleiden kann.

Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige imprimitive Permutationsgruppe, $\mathfrak{R}$ die Untergruppe derjenigen Permutationen, die jedes System in sich überführen, so entspricht unter den Grobpermutationen jeder Permutation von $\mathfrak{R}$ die identische Permutation. Wenn $A < \mathfrak{A}$, $R < \mathfrak{R}$, so führt ARA^{-1} jedes System in sich über, mithin $ARA^{-1} < \mathfrak{R}$, folglich $\mathfrak{R} <_i \mathfrak{A}$. Die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ ist der Gruppe der Grobpermutationen eindeutig isomorph.

Es soll nunmehr die Gruppe $\mathfrak{A}_a$ sämtlicher Automorphismen eines Fußes III. Art

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \cdots \times \mathfrak{H}_\delta$$

bestimmt werden. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_\nu}$ die Gruppe aller Automorphismen für den Huf $\mathfrak{H}_\nu$. Es ist

$$\mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_1} \sim \mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_2} \sim \cdots \sim \mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_\delta}.$$

Wir wollen unter $\mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_\nu}$ gleichzeitig auch die Gruppe sämtlicher Automorphismen von $\mathfrak{F}$ verstehen, bei denen die Elemente von $\mathfrak{H}_\nu$ in einander übergeführt werden, die Elemente aller übrigen Hufe ungeändert bleiben. Die Elemente verschiedener $\mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_\nu}$ sind miteinander vertauschbar, da sie voneinander verschiedene Elementsysteme permutieren. Es ist die Untergruppe $\mathfrak{R}_a < \mathfrak{A}_a$ aller Automorphismen, die jeden Huf in sich überführen,

$$\mathfrak{R}_a = \mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_1} \times \mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_2} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_\delta},$$

da jeder Automorphismus, der sämtliche $\mathfrak{H}_\nu$ in sich überführt, sich eindeutig zusammensetzen läßt aus Automorphismen, die nur die Elemente eines einzigen $\mathfrak{H}_\nu$ unter sich vertauschen. Es ist die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{H}_\nu$: $\mathfrak{A}_{i,\mathfrak{h}_\nu} < \mathfrak{A}_{a,\mathfrak{h}_\nu}$; $\mathfrak{A}_{i,\mathfrak{h}_\nu} \sim \mathfrak{H}_\nu$. Die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{F}$ ist

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{i,\mathfrak{h}_1} \times \mathfrak{A}_{i,\mathfrak{h}_2} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{i,\mathfrak{h}_\delta}, \quad \mathfrak{A}_i < \mathfrak{R}_a,$$

da ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{F}$ jeden Huf nur in sich überführen kann.

Man denke sich eine bestimmte Zuordnung

$$\mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{H}_2 \sim \cdots \sim \mathfrak{H}_\delta$$

festgehalten; ist eine beliebige Grobpermutation gegeben, so führe man sie in der Weise aus, daß die Zuordnung der Elemente durch den festgehaltenen Isomorphismus bestimmt ist. Die so beschaffenen Permutationen bilden eine Gruppe von Automorphismen $\bar{\mathfrak{A}}_a$. (Die Gruppe ist intransitiv, da je δ durch den festen Isomorphismus einander zugeordnete Elemente nur unter sich permutiert werden. Das ist aber für das Folgende nicht wesentlich; auch spielt $\bar{\mathfrak{A}}_a$ keine ausgezeichnete Rolle, da es ja von der Wahl der festen Isomorphismen abhängig ist; $\bar{\mathfrak{A}}_a$ ist lediglich Hilfsmittel des Beweises.) Jeder Grobpermutation entspricht genau ein Element von $\bar{\mathfrak{A}}_a$. $\bar{\mathfrak{A}}_a$ ist isomorph der Gruppe aller möglichen Grobpermutationen. Das ist aber die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_\delta$ von δ Grobsymbolen. Ein beliebiges Element $A_a < \mathfrak{A}_a$ ist von der Form

$$A_a = \bar{A}_a \mathfrak{R}_a,$$

wo $\bar{A}_a < \bar{\mathfrak{A}}_a$, $R_a < \mathfrak{R}_a$. Es ist $\bar{A}_a$ dasjenige Element von $\bar{\mathfrak{A}}_a$, das die gleiche Grobpermutation wie A_a besitzt. Es ist also

$$\mathfrak{A}_a = \bar{\mathfrak{A}}_a \, \mathfrak{R}_a .$$

Es ist $(\bar{\mathfrak{A}}_a, \mathfrak{R}_a) = \mathfrak{E}$, da die Bildungsvorschrift von $\bar{\mathfrak{A}}_a$, wenn jedes System nur in sich permutiert werden darf, jedes einzelne Symbol sich selbst zuordnet. (Das Produkt der beiden Gruppen ist aber kein direktes, da sie nicht elementweise vertauschbar sind. $\bar{\mathfrak{A}}_a$ ist keine invariante Untergruppe von $\mathfrak{A}_a$.) Jeder Komplex von $\frac{\mathfrak{A}_a}{\mathfrak{R}_a}$ enthält genau ein Element von $\bar{\mathfrak{A}}_a$. Es ist

$$\frac{\mathfrak{A}_a}{\mathfrak{R}_a} \sim \mathfrak{S}_\delta .$$

$$\text{Ord } \mathfrak{A}_a = \text{Ord } \mathfrak{R}_a \cdot \text{Ord } \mathfrak{S}_\varrho = a_h^\delta \cdot \delta ! .$$

Hierin ist zur Abkürzung Ord $\mathfrak{A}_{a,h_1} = a_h$ gesetzt.

Es sei $\mathfrak{A}_g$ wieder eine Gruppe, die der Bedingung $\mathfrak{A}_i < \mathfrak{A}_g < \mathfrak{A}_a$ genügt, deren Gruppe der Grobpermutationen transitiv ist; dann ist die Gruppe der Grobpermutationen isomorph $\frac{\mathfrak{A}_g}{\mathfrak{R}_g}$, wo $\mathfrak{R}_g$ die Untergruppe derjenigen Automorphismen von $\mathfrak{A}_g$ bezeichne, die die Symbole jedes Systems, d. h. jeden Huf in sich überführen. Es ist

$$\mathfrak{A}_i < \mathfrak{R}_g < \mathfrak{R}_a .$$

Zu beachten ist aber, daß nicht jede Gruppe, die dieser Bedingung genügt, ein $\mathfrak{R}_g$ sein kann, da die Bedingung $\mathfrak{R}_g <_i \mathfrak{A}_g$ weitere Anforderungen an die Symmetrie des Aufbaues von $\mathfrak{R}_g$ stellt; z. B. sind sämtliche Komponenten von $\mathfrak{R}_g$ in

$$\mathfrak{R}_a = \mathfrak{A}_{a,h_1} \times \mathfrak{A}_{a,h_2} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{a,h_\delta}$$

einander isomorph.

Zum Schluß möge der folgende kurze Überblick über die Ergebnisse der Arbeit gegeben werden:

I. Art: Huf = Fuß $\leqq$ Kohärente
II. Art: Huf $\leqq$ Fuß $\leqq$ Kohärente
III. Art: Huf $\leqq$ Fuß = Kohärente

Art	Hufrang	Rang der Kohärente
I	1	ϱ
II	δ	ϱ
III	δ	1

Art	Ordnung von		
	Huf	Fuß	Kohärente
	$h =$	$f =$	$k =$
I	p	p	p^ϱ
II	p	p^δ	$p^{\delta\varrho}$
III	h	h^δ	h^δ

p bedeutet eine Primzahl.

Gruppe der Automorphismen des Fußes, die in der Gruppe bewirkt werden:

I. Art: Identität.

II. Art: dargestellt durch irreduzible Substitutionsgruppe mod p von δ Veränderlichen.

III. Art: dargestellt durch imprimitive Permutationsgruppe von $(h-1)\,\delta$ Symbolen mit transitiver Grobpermutation.

Art	Ordnung der Gruppe aller Automorphismen von:	
	Huf	Fuß
II	$p-1$	$(p^\delta-1)\,(p^\delta-p)\cdots(p^\delta-p^{\delta-1})$
III	a_h	$a_h^\delta\cdot\delta!$

a_h ist teilbar durch h.

August 1927.

Eingegangen 3. August 1928.

Eine neue Methode zur Herleitung asymptotischer Ausdrücke in Anwendung auf die Besselschen Funktionen.

Von *Henri Jordan* in Wiesbaden.

Einleitung.

In vielen Fragen der reinen und angewandten Mathematik ist die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens gewisser Funktionen von großer Bedeutung. Es handelt sich dabei in erster Linie um die Funktionen, die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit reellen Koeffizienten genügen. Das Problem kann noch dadurch kompliziert werden, daß die Forderung gestellt wird, gleichzeitig mit dem Argumente solle auch ein Parameter unbegrenzt zunehmen. Jedenfalls handelt es sich, sofern nur reelle Werte von Argument und Parameter in Augenschein genommen werden, um Fragestellungen rein reeller Natur.

Dennoch erfolgte die Inangriffnahme dieser Probleme meistens mit funktionentheoretischen Methoden, die von Lagrange, Laplace, Riemann, Darboux zu großer Leistungsfähigkeit entwickelt wurden. Ganz abgesehen davon, daß, wie schon erwähnt, rein reelle Probleme dabei mit allen Mitteln der komplexen Theorie behandelt werden, scheinen uns diesen Methoden gewisse Nachteile anzuhaften. Vor allem die Kompliziertheit des ganzen Apparats; ferner — die Darbouxsche Methode ausgenommen — die Tatsache, daß es sich um Untersuchungen handelt, die für jeden Einzelfall einer charakteristischen Ausgestaltung bedürfen. Ganz anderer Natur sind die Untersuchungen Sturms über lineare Differentialgleichungen. Mit Hilfe seiner Majorisations- und Minorisationssätze bekommt er Oszillationstheoreme, die sich aber im wesentlichen auf Nullstellenseparation beziehen und topologischen Charakter haben.

Auf diesem Wege kann aber weitergearbeitet werden. Wir werden als für die Funktion charakteristisch nicht etwa ihre Darstellung durch Potenzreihen oder bestimmte Integrale betrachten, sondern den Verlauf der Koeffizienten der Differentialgleichung, welcher sie genügt. Wir beschränken uns hier auf Gleichungen der Form $\frac{v''}{v} = f(x)$, wobei $f(x) \geqq 0$ sein soll. Die Idee, die dieser Arbeit zugrunde liegt, ist folgende:

Wir ersetzen die rechte Seite f der Differentialgleichung durch unstetige Funktionen, Treppen, deren Stufen so gewählt sind, daß sie, als rechte Seite der Differentialgleichung betrachtet, deren unmittelbare Auflösung durch elementare Funktionen erlauben. Auf diese Art keilen wir die rechte Seite unserer Differentialgleichung ein zwischen zwei Treppenwege, und bekommen unter Anwendung der Sturmschen Sätze eine Majorante und eine Minorante für die Lösung. Geht noch in die Differentialgleichung ein Parameter ein, so richten wir es so ein, daß sich die Treppenwege bei Änderung des Parameters mitändern, so daß die rechte Seite zwischen ihnen eingeklemmt bleibt.

Die einfache Art der Differentialgleichung, die durch jede Stufe geliefert wird, erlaubt es, den Aufbau der Majorante und der Minorante am Ende der Treppenwege

einigermaßen zu überschauen; bei passender Konstruktion der Treppen bekommt man Einsicht in die Bestandteile, die bei Unendlichwerden der Endstellen des Treppenweges (und des eventuellen Parameters) für die Größenordnung von Wichtigkeit sind. Bei wachsender Stufenzahl stellt man fest, daß diese dominierenden Bestandteile der Majorante und der Minorante sich demselben Grenzwerte nähern, und wir erwarten dann, daß dieser auch den wesentlichen Bestandteil der Lösung darstellt. Der Versuch zeigt, daß es bei alledem auf die Art der Stufen nicht ankommt.

Das Verfahren kann also kurz charakterisiert werden als das Ersetzen der rechten Seite der betrachteten Differentialgleichung durch eine Treppe mit unendlich vielen Stufen. Diese Betrachtungen haben natürlich zunächst nur heuristischen Wert; sie liefern aber im Einzelfalle den Ansatz zu einer strengen Durchführung, und weisen genau den Weg, der verfolgt werden muß.

Die Schwierigkeiten liegen in der Auffindung der passenden Form der Grenzübergänge, der Behandlung der Stellen, an denen die rechte Seite verschwindet oder unendlich wird, der richtigen Koppelung der verwendeten Parameter, und vor allem in der strengen Durchführung der Abschätzungen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Gedankengänge auf drei Probleme angewandt: zuerst die Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Lösung von $\frac{v''}{v} = x$ als einfachstes Beispiel, das übrigens im weiteren zur Verwendung kommt; dann die Untersuchung der Besselschen Funktionen bei gleichzeitigem Anwachsen von Argument und Parameter ($I_n(an)$, $a \leqq 1$); endlich die Untersuchung der Nullstellen der Besselschen Funktionen bei großen Werten des Parameters.

Dieser letzte Teil hält sich äußerlich weniger streng an das oben beschriebene Schema, es liegen jedoch auch hier dieselben Betrachtungen zugrunde.

Ein Vorteil dieser Behandlungsart ist unserer Meinung nach die sich naturgemäß ergebende Kennzeichnung der Null- und Unendlichkeitsstellen der rechten Seite als kritische Stellen der asymptotischen Darstellung; z. B. ergiebt sich bei der Untersuchung der Besselschen Funktion $I_n(a\,n)$, daß man bis zu einer gewissen Stelle mit monotonen Funktionen als Approximationselementen zu operieren hat — von da ab mit oszillierenden Funktionen. So ergibt sich die Änderung der asymptotischen Formel an der Stelle $a = 1$, die bei der funktionentheoretischen Methode befremdet.

Die hier skizzierte Behandlungsart kann vielleicht nach zwei Richtungen weiterentwickelt werden, und es erscheint möglich, daß auch die Lösungen anderer Differentialgleichungen als $\frac{v''}{v} = f(x)$ $(f(x) \geqq 0)$, z. B. die in der mathematischen Physik auftretenden Lösungen von Differentialgleichungen quasi-Fuchsschen Typus' einer analogen Behandlung zugänglich sind. Denn erstens haben wir hier die Sturmschen Majorisationssätze bloß in ihrer allereinfachsten Form gebraucht; zweitens scheint es, daß die Anwendung dieser Sätze sich ersetzen läßt durch Aussagen über die Änderung, die die Lösung einer Differentialgleichung erleidet bei gleichmäßig kleiner Variation der Koeffizienten in einem gegebenen Intervall. Durch solche Aussagen nämlich würden Grenzübergänge ermöglicht werden bei Treppenannäherung, d. h. bei unbegrenzter Zunahme der Anzahl sprunghafter Unstetigkeiten in den Koeffizienten.

Ferner haben wir uns mit der Ableitung des asymptotischen Hauptgliedes begnügt; vielleicht lassen sich durch Verfeinerung der Behandlung auch weitere Glieder, vielleicht die ganze semi-konvergente Reihe aufstellen.

Das Problem der asymptotischen Darstellung von $I_n(a\,n)$ scheint bis jetzt noch nie mit Hilfe der Sturmschen Sätze in Angriff genommen worden zu sein. Im Sinne einer reellen Behandlung dieser Fragen kommen einige Ableitungen in Betracht, die an die Integraldarstellung von $I_n(x)$ anknüpfen, sich also dem Wesen nach von den funktionentheoretischen Methoden nicht sehr unterscheiden, ferner die Arbeiten von *Meissel* (Astron. Nachrichten **129** (1892), S. 281 und **130** (1892), S. 363), *Jeffreys* (Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), S. 428) und *Goldstein* (Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), S. 81); diesen Untersuchungen liegt die Benutzung asymptotischer Reihen zugrunde, welche der Differentialgleichung formal genügen (*Horn*, Math. Annalen **52** (1899), S. 340).

Zur Geschichte des Nullstellenproblems folgende Bemerkungen:

In den Annals of Math. **9** (1894) gab *Mac-Mahon* die nach ihm benannte Entwicklung an, welche zur Berechnung der großen Nullstellen von Funktionen fester Ordnung n dienen sollte, jedoch auch bei großer Ordnungszahl zu gebrauchen ist, falls der Nullstellenindex sehr stark mit n wächst. *G. N. Watson* hat auf funktionentheoretischem Wege (Proc. Royal Society A **94** (1918) die asymptotische Lage der ersten Nullstellen gefunden, bis auf einen endlichen Fehler. In seinem „Treatise" (15 . 83) löst er das Problem auf reellem Wege, in dem er unter Anwendung der Sturmschen Sätze die Funktion $I_n(x)$ von n bis zur ersten Nullstelle zwischen zwei andere Funktionen einschließt. Diese Vergleichsfunktionen werden mittels einer ziemlich komplizierten Analyse gewonnen (von den Nicholsonschen Formeln ausgehend). Auf diese Art leitet Watson den asymptotischen Ausdruck für die erste Nullstelle in seiner vollen Schärfe ab. Unsere Methode führt insofern weiter, als sie auch das asymptotische Verhalten aller weiteren Nullstellen erschließt, ja sogar das Verhalten solcher Nullstellen, deren Index von n abhängt.

Schon 1916 hatten *F. Emde* (Archiv der Math. und Phys. (3) **24** (1916)) und *J. R. Airey* (Philos. Magaz. (6) **32** (1916)) die (richtigen) asymptotischen Formeln für Nullstellen von festem und sogar auch variablem Index aufgestellt, durch ein Verfahren der sukzessiven Approximation; sie gingen jedoch von unzutreffenden Voraussetzungen über den Gültigkeitsbereich der Debyeschen Reihen aus.

Auf Grund der Sturmschen Sätze ist das Nullstellenproblem — abgesehen von Watson — auch von *Bôcher*, *Bourget*, *Gasser*, *Porter* in Angriff genommen worden, jedoch erreichten diese Autoren keine Resultate von sehr großer Tragweite, zur asymptotischen Darstellung der Nullstellen kommt es nicht. Erschöpfende Literaturangabe findet man im Werk von *G. N. Watson*: „A Treatise on the Theory of Bessel Functions" (Cambridge 1922).

Im Laufe dieser Betrachtungen werden wir *die Sturmschen Majorisationssätze* bloß in folgender einfacher Form benutzen (zum Beweis vgl. etwa Watson, Treatise 15. 83):

Die Koeffizienten $f_1(x)$, $f_2(x)$ der Differentialgleichungen $u'' + f_1 u = 0$; $u'' + f_2 u = 0$ seien im Intervall $a \leqq x \leqq b$ abteilungsweise stetige Funktionen von x, und es sei $f_1(x) \geqq f_2(x)$; $u_1(x)$, $u_2(x)$ seien samt ihrer ersten Ableitung stetige Funktionen, welche der ersten bzw. der zweiten dieser Differentialgleichungen genügen, und für die an einer Stelle x_0 des Intervalls $a \leqq x \leqq b$:

$$u_1(x_0) = u_2(x_0) > 0; \qquad u_1'(x_0) = u_2'(x_0) > 0.$$

Dann ist im Intervall $x_0 \leqq x \leqq b$:

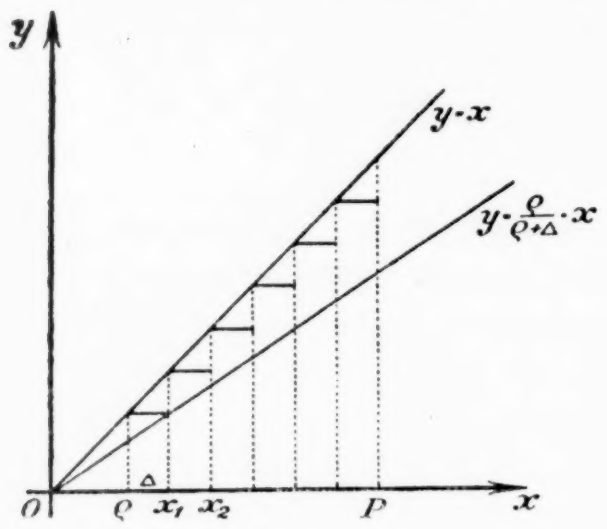
$u_1(x) \leqq u_2(x)$ von x_0 bis zur ersten Nullstelle von u_1

$u_1'(x) \leqq u_2'(x)$ von x_0 bis zur ersten Nullstelle von u_1'.

I. Die Lösung von $\frac{v''}{v} = x$.

§ 1.

Wir wollen das Verhalten der Funktion v für große Werte von x untersuchen. In diesem einfachen Fall können wir uns mit einem einzigen Treppenwege begnügen, den wir unter Abtrennung der Stelle $x = 0$ folgendermaßen konstruieren (siehe Fig. 1):



Figur 1.

Es sei $0 < \varrho < P$, k eine ganze positive Zahl, $\frac{P-\varrho}{k} = \Delta$,

$$x_\nu = \varrho + \nu\Delta \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k),$$

so daß $x_0 = \varrho$, $x_k = P$.

Es sei dann $\mathfrak{T} = x_\nu$ im Intervall x_ν bis $x_{\nu+1}$.

Die Funktion v, die der Differentialgleichung $\frac{v''}{v} = x$ genügt, habe bei $x = 0$ für Wert und Ableitung die Anfangswerte c_1 und c_2; bei $x = \varrho$ haben dann v und v' die Werte $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$; sei noch $c_1, c_2 \geqq 0$, so ist für alle positiven x: $v, v' \geqq 0$.

Mit $v_u(x)$ wollen wir eine Funktion bezeichnen, welche samt ihrer ersten Ableitung im Intervall (ϱ, P) stetig ist, bei ϱ den Wert $\bar{c}_1$, ihre Ableitung den Wert $\bar{c}_2$ annimmt, und welche im betreffenden Intervall der Differentialgleichung $\frac{v''}{v} = \mathfrak{T}$ genügt. Der Treppenweg $\mathfrak{T}$ liegt vollständig unterhalb der Geraden $y = x$, andererseits aber vollständig oberhalb $y = \frac{\varrho}{\varrho + \Delta} x$. Die Lösung von $\frac{v''}{v} = \frac{\varrho}{\varrho + \Delta} x$, die bei $x = 0$ die Anfangswerte c_1, c_2 annimmt (Wert und Ableitung), wollen wir v^* nennen. Nach dem Satz von Stu m ist nun:

$$(1) \qquad v^*(P) \leqq v_u(P) \leqq v(P); \quad v^{*\prime}(P) \leqq v_u'(P) \leqq v'(P).$$

Dies gilt für alle k. Andererseits aber ist bei festem ϱ und P:

$$\lim_{k\to\infty} v^*(P) = v(P); \quad \lim_{k\to\infty} v^{*\prime}(P) = v'(P).$$

(Dies ist aus der besonderen Form zu erkennen, in der der Parameter $\frac{\varrho}{\varrho + \Delta}$ in der Differentialgleichung für v^* auftritt; er läßt sich durch Einführung einer neuen Variablen ξ entfernen mittels der Transformation $\xi = x\left(\frac{\varrho}{\varrho + \Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$.)

Daraus folgt erstens, daß $v_u(P)$ und $v_u'(P)$ bei zunehmenden k einem Grenzwerte zustreben, zweitens, daß dieser Grenzwert $v(P)$ bzw. $v'(P)$ ist.

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} v_u(P) = v(P); \quad \lim_{k\to\infty} v_u'(P) = v'(P).$$

§ 2.

Wir müssen uns nun die Bildung von $v_u(P)$ und $v_u'(P)$ genauer ansehen. Im Intervalle x_ν bis $x_{\nu+1}$ ist:

$$v_u = a_\nu e^{x\sqrt{x_\nu}} + b_\nu e^{-x\sqrt{x_\nu}}; \quad v_u' = a_\nu\sqrt{x_\nu}\, e^{x\sqrt{x_\nu}} - b_\nu\sqrt{x_\nu}\, e^{-x\sqrt{x_\nu}},$$

wobei für die Wurzel stets das positive Vorzeichen zu wählen ist. Aus der Stetigkeit von v_u und v_u' an den Stellen x_ν ergibt sich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_\nu &= \tfrac{1}{2}\, e^{-x_\nu\sqrt{x_\nu}}\Big\{a_{\nu-1}\Big(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}} + b_{\nu-1}\Big(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}\Big\}\\ b_\nu &= \tfrac{1}{2}\, e^{x_\nu\sqrt{x_\nu}}\Big\{a_{\nu-1}\Big(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}} + b_{\nu-1}\Big(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}\Big\}. \end{aligned}$$

Diese Rekursionsformeln werden vervollständigt durch:

$$(3\,a)\qquad a_0 = \frac{e^{-x_0\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(\bar c_1\sqrt{x_0}+\bar c_2);\quad b_0 = \frac{e^{x_0\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(\bar c_1\sqrt{x_0}-\bar c_2).$$

Und es ist:

$$v_u(P) = a_{k-1}e^{x_k\sqrt{x_{k-1}}} + b_{k-1}e^{-x_k\sqrt{x_{k-1}}};\quad v_u'(P) = \sqrt{x_{k-1}}\,a_{k-1}e^{x_k\sqrt{x_{k-1}}} - \sqrt{x_{k-1}}\,b_{k-1}e^{-x_k\sqrt{x_{k-1}}}.$$

Wenden wir die Rekursionsformeln (3) sukzessive auf diese Ausdrücke an, so sehen wir, daß bei jedem Schritt die Anzahl der Summanden, aus denen $v_u(P)$ bzw. $v_u'(P)$ besteht, verdoppelt wird.

War dabei der letzte Faktor des betreffenden Summanden $a_\nu e^{x_{\nu+1}\sqrt{x_\nu}}$, so geht er über entweder in

$$\frac{1}{2}\,e^{\lambda\sqrt{x_\nu}}\Big(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)a_{\nu-1}e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}} \text{ oder in } \frac{1}{2}\,e^{\lambda\sqrt{x_\nu}}\Big(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)b_{\nu-1}e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}.$$

War dieser letzte Faktor dagegen $b_\nu e^{-x_{\nu+1}\sqrt{x_\nu}}$, so wird aus ihm entweder

$$\frac{1}{2}\,e^{-\lambda\sqrt{x_\nu}}\Big(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)a_{\nu-1}e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}} \text{ oder } \frac{1}{2}\,e^{-\lambda\sqrt{x_\nu}}\Big(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\Big)b_{\nu-1}e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}.$$

Daraus ersehen wir, daß $v_u(P)$ aus 2^{k-1} Summanden besteht, von der Form:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2^k\prod_0^{k-1}\sqrt{x_\nu}}\{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}+\bar c_2)e^{\lambda\sqrt{x_0}} + (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}-\bar c_2)e^{-\lambda\sqrt{x_0}}\}\\ &\qquad\cdot\prod_2^{k-1}(\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}(-1)^{\varepsilon_\nu+\varepsilon_{\nu-1}})\,e^{\lambda\sum_1^{k-1}\sqrt{x_\nu}(-1)^{\varepsilon_\nu}}\\ \text{und ebenso } &v_u'(P) \text{ aus } 2^{k-1} \text{ Summanden:}\\ &\frac{\sqrt{x_{k-1}}(-1)^{\varepsilon_{k-1}}}{2^k\prod_0^{k-1}\sqrt{x_\nu}}\{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}+\bar c_2)e^{\lambda\sqrt{x_0}} + (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}-\bar c_2)e^{-\lambda\sqrt{x_0}}\}\\ &\qquad\cdot\prod_2^{k-1}(\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}(-1)^{\varepsilon_\nu+\varepsilon_{\nu-1}})\,e^{\lambda\sum_1^{k-1}\sqrt{x_\nu}(-1)^{\varepsilon_\nu}}. \end{aligned}\right.$$

Die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ können dabei den Wert 0 oder 1 haben.

Jeder Kombination von $k-1$ Symbolen 0 oder 1 entspricht ein-eindeutig ein Summand aus $v_u(P)$ bzw. $v_u'(P)$.

§ 3.

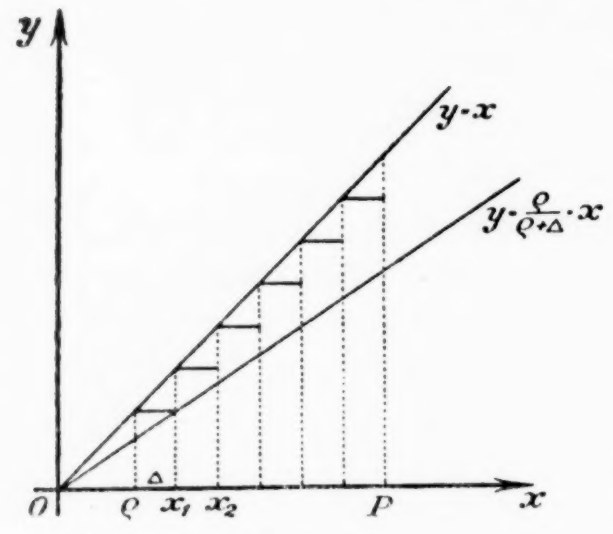
Zunächst wollen wir uns an $v_u(P)$ halten.

Wir ordnen die 2^{k-1} Summanden nach folgendem Gesichtspunkt: So oft in der Reihe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ eine 1 auf eine 0 oder eine 0 auf eine 1 folgt, sprechen wir von einer „Diskrepanz"; jedem Summanden ist also eine gewisse Zahl eigen, die Anzahl der in der zugeordneten Reihe der ε vorkommenden Diskrepanzen. Wir vereinigen nun in Teil-

I. Die Lösung von $\frac{v''}{v} = x$.

§ 1.

Wir wollen das Verhalten der Funktion v für große Werte von x untersuchen. In diesem einfachen Fall können wir uns mit einem einzigen Treppenwege begnügen, den wir unter Abtrennung der Stelle $x = 0$ folgendermaßen konstruieren (siehe Fig. 1):



Figur 1.

Es sei $0 < \varrho < P$, k eine ganze positive Zahl, $\frac{P-\varrho}{k} = \Delta$,

$$x_\nu = \varrho + \nu\Delta \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k),$$

so daß $x_0 = \varrho$, $x_k = P$.

Es sei dann $\mathfrak{T} = x_\nu$ im Intervall x_ν bis $x_{\nu+1}$.

Die Funktion v, die der Differentialgleichung $\frac{v''}{v} = x$ genügt, habe bei $x = 0$ für Wert und Ableitung die Anfangswerte c_1 und c_2; bei $x = \varrho$ haben dann v und v' die Werte $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$; sei noch $c_1, c_2 \geqq 0$, so ist für alle positiven x: $v, v' \geqq 0$.

Mit $v_u(x)$ wollen wir eine Funktion bezeichnen, welche samt ihrer ersten Ableitung im Intervall (ϱ, P) stetig ist, bei ϱ den Wert $\bar{c}_1$, ihre Ableitung den Wert $\bar{c}_2$ annimmt, und welche im betreffenden Intervall der Differentialgleichung $\frac{v''}{v} = \mathfrak{T}$ genügt. Der Treppenweg $\mathfrak{T}$ liegt vollständig unterhalb der Geraden $y = x$, andererseits aber vollständig oberhalb $y = \frac{\varrho}{\varrho + \Delta} x$. Die Lösung von $\frac{v''}{v} = \frac{\varrho}{\varrho + \Delta} x$, die bei $x = 0$ die Anfangswerte c_1, c_2 annimmt (Wert und Ableitung), wollen wir v^* nennen. Nach dem Satz von Stu m ist nun:

$$(1) \qquad v^*(P) \leqq v_u(P) \leqq v(P); \quad v^{*\prime}(P) \leqq v_u'(P) \leqq v'(P).$$

Dies gilt für alle k. Andererseits aber ist bei festem ϱ und P:

$$\lim_{k\to\infty} v^*(P) = v(P); \quad \lim_{k\to\infty} v^{*\prime}(P) = v'(P).$$

(Dies ist aus der besonderen Form zu erkennen, in der der Parameter $\frac{\varrho}{\varrho + \Delta}$ in der Differentialgleichung für v^* auftritt; er läßt sich durch Einführung einer neuen Variablen ξ entfernen mittels der Transformation $\xi = x\left(\frac{\varrho}{\varrho + \Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$.)

Daraus folgt erstens, daß $v_u(P)$ und $v_u'(P)$ bei zunehmenden k einem Grenzwerte zustreben, zweitens, daß dieser Grenzwert $v(P)$ bzw. $v'(P)$ ist.

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} v_u(P) = v(P); \quad \lim_{k\to\infty} v_u'(P) = v'(P).$$

§ 2.

Wir müssen uns nun die Bildung von $v_u(P)$ und $v_u'(P)$ genauer ansehen. Im Intervalle x_ν bis $x_{\nu+1}$ ist:

$$v_u = a_\nu e^{x\sqrt{x_\nu}} + b_\nu e^{-x\sqrt{x_\nu}}; \quad v_u' = a_\nu\sqrt{x_\nu} e^{x\sqrt{x_\nu}} - b_\nu\sqrt{x_\nu} e^{-x\sqrt{x_\nu}},$$

wobei für die Wurzel stets das positive Vorzeichen zu wählen ist. Aus der Stetigkeit von v_u und v_u' an den Stellen x_ν ergibt sich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_\nu &= \tfrac{1}{2}\, e^{-x_\nu\sqrt{x_\nu}}\left\{a_{\nu-1}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}+b_{\nu-1}\left(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}\right\}\\ b_\nu &= \tfrac{1}{2}\, e^{x_\nu\sqrt{x_\nu}}\left\{a_{\nu-1}\left(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}+b_{\nu-1}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}\right\}. \end{aligned}$$

Diese Rekursionsformeln werden vervollständigt durch:

$$(3\,a)\qquad a_0=\frac{e^{-x_0\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(\bar c_1\sqrt{x_0}+\bar c_2);\quad b_0=\frac{e^{x_0\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(\bar c_1\sqrt{x_0}-\bar c_2).$$

Und es ist:

$$v_u(P)=a_{k-1}e^{x_k\sqrt{x_{k-1}}}+b_{k-1}e^{-x_k\sqrt{x_{k-1}}};\quad v_u'(P)=\sqrt{x_{k-1}}\,a_{k-1}e^{x_k\sqrt{x_{k-1}}}-\sqrt{x_{k-1}}\,b_{k-1}e^{-x_k\sqrt{x_{k-1}}}.$$

Wenden wir die Rekursionsformeln (3) sukzessive auf diese Ausdrücke an, so sehen wir, daß bei jedem Schritt die Anzahl der Summanden, aus denen $v_u(P)$ bzw. $v_u'(P)$ besteht, verdoppelt wird.

War dabei der letzte Faktor des betreffenden Summanden $a_\nu e^{x_{\nu+1}\sqrt{x_\nu}}$, so geht er über entweder in

$$\frac{1}{2}\,e^{\Delta\sqrt{x_\nu}}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)a_{\nu-1}e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}\text{ oder in }\frac{1}{2}\,e^{\Delta\sqrt{x_\nu}}\left(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)b_{\nu-1}e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}.$$

War dieser letzte Faktor dagegen $b_\nu e^{-x_{\nu+1}\sqrt{x_\nu}}$, so wird aus ihm entweder

$$\frac{1}{2}\,e^{-\Delta\sqrt{x_\nu}}\left(1-\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)a_{\nu-1}e^{x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}\text{ oder }\frac{1}{2}\,e^{-\Delta\sqrt{x_\nu}}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)b_{\nu-1}e^{-x_\nu\sqrt{x_{\nu-1}}}.$$

Daraus ersehen wir, daß $v_u(P)$ aus 2^{k-1} Summanden besteht, von der Form:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2^k\prod_0^{k-1}{}_\nu\sqrt{x_\nu}}\left\{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}+\bar c_2)e^{\Delta\sqrt{x_0}}+(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}-\bar c_2)e^{-\Delta\sqrt{x_0}}\right\}\\ &\qquad\cdot\prod_2^{k-1}{}_\nu(\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}(-1)^{\varepsilon_\nu+\varepsilon_{\nu-1}})\,e^{\Delta\sum_1^{k-1}{}^\nu\sqrt{x_\nu}(-1)^{\varepsilon_\nu}}\\ &\text{und ebenso } v_u'(P) \text{ aus } 2^{k-1} \text{ Summanden:}\\ &\frac{\sqrt{x_{k-1}}(-1)^{\varepsilon_{k-1}}}{2^k\prod_0^{k-1}{}_\nu\sqrt{x_\nu}}\left\{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}+\bar c_2)e^{\Delta\sqrt{x_0}}+(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}(-1)^{\varepsilon_1})(\bar c_1\sqrt{x_0}-\bar c_2)e^{-\Delta\sqrt{x_0}}\right\}\\ &\qquad\cdot\prod_2^{k-1}{}_\nu(\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}(-1)^{\varepsilon_\nu+\varepsilon_{\nu-1}})\,e^{\Delta\sum_1^{k-1}{}^\nu\sqrt{x_\nu}(-1)^{\varepsilon_\nu}}. \end{aligned}\right.$$

Die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ können dabei den Wert 0 oder 1 haben.

Jeder Kombination von $k-1$ Symbolen 0 oder 1 entspricht ein-eindeutig ein Summand aus $v_u(P)$ bzw. $v_u'(P)$.

§ 3.

Zunächst wollen wir uns an $v_u(P)$ halten.

Wir ordnen die 2^{k-1} Summanden nach folgendem Gesichtspunkt: So oft in der Reihe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}$ eine 1 auf eine 0 oder eine 0 auf eine 1 folgt, sprechen wir von einer „Diskrepanz"; jedem Summanden ist also eine gewisse Zahl eigen, die Anzahl der in der zugeordneten Reihe der ε vorkommenden Diskrepanzen. Wir vereinigen nun in Teil-

summen alle Summanden, für die diese Zahl die gleiche ist. S_μ sei die Teilsumme, der die Zahl von μ Diskrepanzen in der ε-Reihe zugeordnet ist:

$$v_u(P) = S_0 + S_1 + \cdots + S_{k-1}. \tag{5}$$

Diese Art der Einteilung wird dadurch nahegelegt, daß in den einzelnen Summanden bei jeder Diskrepanz der Reihe ein Faktor $\sqrt{x_\nu} - \sqrt{x_{\nu-1}}$ auftritt, der also von der Größenordnung Δ ist; es ist zweckmäßig, alle Summanden zu sammeln, die denselben Faktor Δ^r enthalten, da wir erwarten können, daß sie sich beim Grenzübergang zu einem μ-fachen Integral zusammenfügen.

Wir zerlegen jeden Summanden in einen „Hauptteil" H — der der Diskrepanzfreiheit entspricht — und einen durch die auftretende Diskrepanzen bedingten Faktor:

$$\left\{\begin{aligned} S_\nu &= H\left\{h_1^{(\nu)}\left\{e^{\Delta\sqrt{x_0}}\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}}\frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}+c_2}{2\sqrt{x_0}} + e^{-\Delta\sqrt{x_0}}\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}}\frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}-\bar{c}_2}{2\sqrt{x_0}}\right\}\right. \\ &\qquad \left. + h_2^{(\nu)}\left\{e^{\Delta\sqrt{x_0}}\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}}\frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}+\bar{c}_2}{2\sqrt{x_0}} + e^{-\Delta\sqrt{x_0}}\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}}\frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}-c_2}{2\sqrt{x_0}}\right\}\right\} \\ H &= e^{\Delta\sum_1^{k-1}\sqrt{x_\nu}}\prod_2^{k-1}{}^{\nu}\Big/_2\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Im Falle $\nu = 0$ ist offenbar $h_1^{(0)} = 1$, $h_2^{(0)} = e^{-2\Delta\sum_1^{k-1}\sqrt{x_\nu}}$; für $\nu \neq 0$ müssen wir unterscheiden, ob ν gerade oder ungerade ist. Bei näherer Betrachtung der allgemeinen Summandenformel und der Möglichkeiten, die sich für die Bildung der ε-Reihe unter Forderung von einer bestimmten Anzahl Diskrepanzen ergeben, kommen wir für h_1 und h_2 zu folgenden Ausdrücken:

Im Falle $S_{2\nu+1}$:

$$h_1^{(2\nu+1)} = \sum_2^{\alpha^1}\sum_{\alpha^1}^{\alpha^2}\sum_{2+\alpha^2}^{\alpha^3}\cdots\sum_{2+\alpha^{2\nu-2}}^{k-3}\sum_{\alpha^{2\nu-1}}^{k-3}\sum_{2+\alpha^{2\nu}}^{k-1}\frac{\sqrt{x_{\alpha^1}}-\sqrt{x_{\alpha^1-1}}}{\sqrt{x_{\alpha^1}}+\sqrt{x_{\alpha^1-1}}}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x_{\alpha^2+1}}-\sqrt{x_{\alpha^2}}}{\sqrt{x_{\alpha^2+1}}+\sqrt{x_{\alpha^2}}}\cdots\frac{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}}}-\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}-1}}}{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}}}+\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}-1}}}\ \exp\left\{-2\Delta\left[\sum_{\alpha^1}^{\alpha^2}\sqrt{x_\nu}+\sum_{\alpha^3}^{\alpha^4}\sqrt{x_\nu}+\cdots+\sum_{\alpha^{2\nu+1}}^{k-1}\sqrt{x_\nu}\right]\right\}$$

$$h_2^{(2\nu+1)} = \sum_1^{\alpha^1}\sum_{2+\alpha^1}^{\alpha^2}\sum_{\alpha^2}^{\alpha^3}\cdots\sum_{2+\alpha^{2\nu-1}}^{k-2}\sum_{\alpha^{2\nu}}^{k-2}\frac{\sqrt{x_{\alpha^1+1}}-\sqrt{x_{\alpha^1}}}{\sqrt{x_{\alpha^1+1}}+\sqrt{x_{\alpha^1}}}\frac{\sqrt{x_{\alpha^2}}-\sqrt{x_{\alpha^2-1}}}{\sqrt{x_{\alpha^2}}+\sqrt{x_{\alpha^2-1}}}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x_{\alpha^3+1}}-\sqrt{x_{\alpha^3}}}{\sqrt{x_{\alpha^3+1}}+\sqrt{x_{\alpha^3}}}\cdots\frac{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}+1}}-\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}}}}{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}+1}}+\sqrt{x_{\alpha^{2\nu+1}}}}\ \exp\left\{-2\Delta\left[\sum_1^{\alpha^1}\sqrt{x_\nu}+\sum_{\alpha^2}^{\alpha^3}\sqrt{x_\nu}+\cdots+\sum_{\alpha^{2\nu}}^{\alpha^{2\nu+1}}\sqrt{x_\nu}\right]\right\}$$

a) und im Falle $S_{2\nu}$:

$$h_1^{(2\nu)} = \sum_2^{\alpha^1}\sum_{\alpha^1}^{\alpha^2}\cdots\sum_{\alpha^{2\nu-3}}^{k-4}\sum_{2+\alpha^{2\nu-2}}^{k-2}\sum_{\alpha^{2\nu-1}}^{k-2}\frac{\sqrt{x_{\alpha^1}}-\sqrt{x_{\alpha^1-1}}}{\sqrt{x_{\alpha^1}}+\sqrt{x_{\alpha^1-1}}}\frac{\sqrt{x_{\alpha^2+1}}-\sqrt{x_{\alpha^2}}}{\sqrt{x_{\alpha^2+1}}+\sqrt{x_{\alpha^2}}}\cdots$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}+1}}-\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}}}}{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}+1}}+\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}}}}\ \exp\left\{-2\Delta\left[\sum_{\alpha^1}^{\alpha^2}\sqrt{x_\nu}+\sum_{\alpha^3}^{\alpha^4}\sqrt{x_\nu}+\cdots+\sum_{\alpha^{2\nu-1}}^{\alpha^{2\nu}}\sqrt{x_\nu}\right]\right\}$$

$$h_2^{(2\nu)} = \sum_1^{\alpha^1}\sum_{2+\alpha^1}^{\alpha^2}\sum_{\alpha^2}^{\alpha^3}\cdots\sum_{\alpha^{2\nu-2}}^{k-3}\sum_{2+\alpha^{2\nu-1}}^{k-1}\frac{\sqrt{x_{\alpha^1+1}}-\sqrt{x_{\alpha^1}}}{\sqrt{x_{\alpha^1+1}}+\sqrt{x_{\alpha^1}}}\frac{\sqrt{x_{\alpha^2}}-\sqrt{x_{\alpha^2-1}}}{\sqrt{x_{\alpha^2}}+\sqrt{x_{\alpha^2-1}}}\cdots$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}}}-\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}-1}}}{\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}}}+\sqrt{x_{\alpha^{2\nu}-1}}}\ \exp\left\{-2\Delta\left[\sum_1^{\alpha^1}\sqrt{x_\nu}+\cdots+\sum_{\alpha^{2\nu}}^{k-1}\sqrt{x_\nu}\right]\right\},$$

wobei die $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2\nu+1}$ laufende Summationsindizes sind.

§ 4.

Wir können nun die Grenzwerte bestimmen, gegen welche die vielfachen Summen (6 a) streben, die wir für h_1 und h_2 aufstellten, wenn wir bei festem ϱ, P und ν die Stufenzahl k unbegrenzt zunehmen lassen. Zunächst ist:

$$-2\Delta\left\{\sum_{\alpha^1}^{\alpha^2}\sqrt{x_\nu}+\cdots+\sum_{\alpha^{2\nu+1}}^{k-1}\sqrt{x_\nu}\right\}$$
$$=-\tfrac{4}{3}\left\{x_{\alpha^2}^{3/2}-x_{\alpha^1}^{3/2}+x_{\alpha^4}^{3/2}-x_{\alpha^3}^{3/2}+\cdots+P^{3/2}-x_{\alpha^{2\nu+1}}^{3/2}\right\}+\Delta\cdot r_1,$$

dabei ist $|r_1|\leqq 2\sum_1^{k-1}(\sqrt{x_\nu}-\sqrt{x_{\nu-1}})$ und bleibt folglich unterhalb einer von k und den eingehenden Indizes unabhängigen Schranke. Ebenso:

$$\exp\left\{-2\Delta\left[\sum_{\alpha^1}^{\alpha^2}\sqrt{x_\nu}+\cdots+\sum_{\alpha^{2\nu+1}}^{k-1}\sqrt{x_\nu}\right]\right\}$$
$$=(1+\Delta\cdot r_2)\cdot\exp\left\{-\tfrac{4}{3}\left[x_{\alpha^2}^{3/2}-x_{\alpha^1}^{3/2}+\cdots+P^{3/2}-x_{\alpha^{2\nu+1}}^{3/2}\right]\right\},$$

wobei für r_2 dasselbe gilt wie für r_1. Ferner ist:

$$\frac{\sqrt{x_\nu}-\sqrt{x_{\nu-1}}}{\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}}=\frac{\Delta}{4x_\nu}(1+\Delta\cdot r_2),$$

und der einzelne Summand aus $h_1^{(2\nu+1)}$ ist gleich:

$$(1+\Delta\cdot r)\frac{\Delta}{4x_{\alpha^1}}\frac{\Delta}{4x_{\alpha^2}}\cdots\frac{\Delta}{4x_{\alpha^{2\nu+1}}}\exp\left\{-\tfrac{4}{3}\left[x_{\alpha^2}^{3/2}-x_{\alpha^1}^{3/2}+\cdots+P^{3/2}-x_{\alpha^{2\nu+1}}^{3/2}\right]\right\}.$$

Dabei ist also r eine Funktion von allen α und von k, sie besitzt aber eine Schranke, die von allen diesen Größen unabhängig ist.

Nehmen wir die erste Summation vor; es kommt:

$$\sum_{2+\alpha^{2\nu}}^{k-1}{}^{\alpha^{2\nu+1}}\frac{\Delta}{4x_{\alpha^1}}\cdots\frac{\Delta}{4x_{\alpha^{2\nu+1}}}\exp\left\{-\tfrac{4}{3}\left(x_{\alpha^2}^{3/2}-\cdots-x_{\alpha^{2\nu+1}}^{3/2}\right)\right\}$$
$$+\Delta\sum_{2+\alpha^{2\nu}}^{k-1}{}^{\alpha^{2\nu+1}}r\,\frac{\Delta}{4x_{\alpha^1}}\frac{\Delta}{4x_{\alpha^2}}\cdots\frac{\Delta}{4x_{\alpha^{2\nu+1}}}\exp\left\{-\tfrac{4}{3}\left(x_{\alpha^2}^{3/2}-\cdots-x_{\alpha^{2\nu+1}}^{3/2}\right)\right\}$$

oder:

$$\int_{2+\alpha^{2\nu}}^{P}\frac{\Delta}{4x_{\alpha^1}}\cdots\frac{\Delta}{4x_{\alpha^{2\nu}}}\exp\left\{-\tfrac{4}{3}\left(x_{\alpha^2}^{3/2}-\cdots+P^{3/2}-q^{3/2}\right)\right\}\frac{dq}{4q}+\Delta\cdot\bar{r},$$

wobei wiederum $\bar{r}$ eine von den Indizes und von k unabhängige Schranke besitzt; hier kommt zur Geltung, daß wir von vornherein die Vorsichtsmaßnahme trafen, die Stelle $x=0$ abzutrennen. Die innerste Summation liefert also im wesentlichen ein Integral. Ähnlich lassen sich die weiteren Summationen ausführen; ν ist eine feste Zahl, die Anzahl der Summationen also von k unabhängig. Es folgt:

$$\lim_{k\to\infty}h_1^{(2\nu+1)}=\frac{1}{4^{2\nu+1}}\int_\varrho^P\int_{q_{2\nu+1}}^P\int_{q_{2\nu}}^P\cdots\int_{q_2}^P\cdot e^{-4/3\,(P^{3/2}-q_1^{3/2}+q_2^{3/2}-\cdots+q_{2\nu}^{3/2}-q_{2\nu+1}^{3/2})}$$
$$\cdot\frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}\cdots\frac{dq_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}}.$$

Und auf analogem Wege:

$$(7)\quad \lim_{k\to\infty} h_2^{(2\nu+1)} = \frac{1}{4^{2\nu+1}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu+1}}^{P}\cdots\int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3\,(q_1^{3/2}-q_2^{3/2}+\cdots+q_{2\nu+1}^{3/2}-\varrho^{3/2})}\,\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} h_1^{(2\nu)} = \frac{1}{4^{2\nu}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P}\cdots\int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3\,(q_1^{3/2}-q_2^{3/2}+\cdots+q_{2\nu-1}^{3/2}-q_{2\nu}^{3/2})}\,\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}}$$

$$\lim_{k\to\infty} h_2^{(2\nu)} = \frac{1}{4^{2\nu}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P}\cdots\int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3\,(P^{3/2}-q_1^{3/2}+q_2^{3/2}-\cdots+q_{2\nu}^{3/2}-\varrho^{3/2})}\,\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}}.$$

Die Klammerfaktoren, mit denen h_1 und h_2 multipliziert sind, haben den Grenzwert $\frac{1}{2}\left(\bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right)$ bzw. $\frac{1}{2}\left(\bar{c}_1 - \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right)$. Nun noch H. Erstens ist:

$$\lim_{k\to\infty} e^{\Delta\sum_1^{k-1}\nu\sqrt{x_\nu}} = e^{{}^2/_3\,(P^{3/2}-\varrho^{3/2})}.$$

Dann müssen wir noch $\prod_2^{k-1}{}_\nu \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right)$ auswerten: Es ist

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right) = 1 - \frac{\Delta}{2\sqrt{x_\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}} = 1 - \frac{\Delta}{4x_\nu} + \Delta^2\cdot r,$$

wobei r gleichmäßig im Intervall (ϱ, P) beschränkt ist, bei wachsendem k.

$$\lg\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right) = -\frac{\Delta}{4x_\nu} + \Delta^2\cdot r_1,$$

wobei für r_1 dasselbe gilt, wie für r.

$$\lg\prod_2^{k-1}{}_\nu \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right) = -\sum_2^{k-1}\frac{\Delta}{4x_\nu} + \Delta\cdot r_2; \qquad \lim_{k\to\infty}\prod_2^{k-1}{}_\nu \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{x_{\nu-1}}{x_\nu}}\right) = \left(\frac{\varrho}{P}\right)^{\frac{1}{4}},$$

und:

$$(8)\qquad \lim_{k\to\infty} H = \varrho^{1/4}\,P^{-1/4}\,e^{{}^2/_3\,(P^{3/2}-\varrho^{3/2})}.$$

Wir wissen nun, daß S_ν beim Grenzübergang $k\to\infty$ bei festem ϱ, P und ν einem Grenzwerte zustrebt, und kennen diesen.

§ 5.

Nun muß noch gezeigt werden, daß der Grenzwert der Summe der S gleich ist der Summe ihrer Grenzwerte. Es sei $\nu < k-1$

$$v_u(P) - S_0 - S_1 - \cdots - S_\nu = S_{\nu-1} + \cdots + S_{k-1}$$
$$|v_u(P) - S_0 - S_1 - \cdots - S_\nu| \leqq |S_{\nu+1}| + \cdots + |S_{k-1}|.$$

Wir schätzen die Glieder der rechten Seite roh ab:
$\frac{\sqrt{x_\nu}-\sqrt{x_{\nu-1}}}{\sqrt{x_\nu}+\sqrt{x_{\nu-1}}}$ läßt sich für alle ν durch $\frac{\Delta}{4\varrho}$ majorisieren; $e^{-2\Delta\{\cdots\}}$, der Exponentialfaktor in h_1 und h_2, durch 1; $h_1^{(\mu)}$ und $h_2^{(\mu)}$ enthalten beide weniger als $\binom{k}{\mu}$ Glieder, wie aus der Definition von S_μ ersichtlich. Es ist folglich:

$$|v_u(P) - S_0 - \cdots - S_\nu| \leqq H \sum_{\nu+1}^{k-1} \binom{k}{\mu} \left(\frac{\Delta}{4\varrho}\right)^\mu$$
$$\cdot \left\{ \left| e^{\Delta\sqrt{x_0}} \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}} \frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}+\bar{c}_2}{2\sqrt{x_0}} + e^{-\Delta\sqrt{x_0}} \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}} \frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}-\bar{c}_2}{2\sqrt{x_0}} \right| \right.$$
$$\left. + \left| e^{\Delta\sqrt{x_0}} \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}} \frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}+\bar{c}_2}{2\sqrt{x_0}} + e^{-\Delta\sqrt{x_0}} \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_0}}{2\sqrt{x_1}} \frac{\bar{c}_1\sqrt{x_0}-\bar{c}_2}{2\sqrt{x_0}} \right| \right\}.$$

Die rechte Seite der Ungleichung strebt, für $k \to \infty$, bei festem ν einem Grenzwerte zu; denn

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu+1}^{k-1} \binom{k}{\mu} \left(\frac{\Delta}{4\varrho}\right)^\mu \leqq e^{\frac{P-\varrho}{4\varrho}} - \left(1 + \frac{\frac{P-\varrho}{4\varrho}}{1!} + \cdots + \frac{\left(\frac{P-\varrho}{4\varrho}\right)^\nu}{\nu!}\right).$$

Andererseits wissen wir schon von $v_u(P)$ und den S, daß sie für $k \to \infty$ Grenzwerten zustreben; es wird:

$$|v(P) - \lim_{k\to\infty} S_0 - \cdots - \lim_{k\to\infty} S_\nu|$$
$$\leqq \frac{1}{2}\left(\left|\bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right| + \left|\bar{c}_1 - \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right|\right) \varrho^{1/4} P^{-1/4} e^{2/3(P^{3/2}-\varrho^{3/2})} \left\{ e^{\frac{P-\varrho}{4\varrho}} - \left(1 + \frac{\frac{P-\varrho}{4\varrho}}{1!} + \cdots + \frac{\left(\frac{P-\varrho}{4\varrho}\right)^\nu}{\nu!}\right)\right\},$$

woraus dann folgt:

$$v(P) = \lim_{k\to\infty} S_0 + \lim_{k\to\infty} S_1 + \cdots \tag{9}$$

§ 6.

Für unsere Funktion $v(P)$ haben wir also jetzt folgenden Ausdruck:

$$v(P) = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{\varrho}\right)^{-1/4} e^{2/3(P^{3/2}-\varrho^{3/2})} \left\{ \left(\bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{4}\int_\varrho^P e^{-2/3(P^{3/2}-q_1^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{4^2}\int_\varrho^P\int_{q_2}^P e^{-2/3(q_1^{3/2}-q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2} + \frac{1}{4^3}\int_\varrho^P\int_{q_3}^P\int_{q_3}^P e^{-2/3(P^{3/2}-q_1^{3/2}+q_2^{3/2}-q_3^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}\frac{dq_3}{q_3} + \cdots \Big\}$$
$$+ \left(\bar{c}_1 - \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right) \left\{ e^{-2/3(P^{3/2}-\varrho^{3/2})} + \frac{1}{4}\int_\varrho^P e^{-2/3(q_1^{3/2}-\varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{4^2}\int_\varrho^P\int_{q_2}^P e^{-2/3(P^{3/2}-q_1^{3/2}+q_2^{3/2}-\varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2} + \cdots \right\} \right\}. \tag{10 a}$$

Auf demselben Weg findet man für $v'(P)$ die Formel:

$$v'(P) = \frac{1}{2}\varrho^{1/4} P^{1/4} e^{2/3(P^{3/2}-\varrho^{3/2})} \left\{ \left(\bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{4}\int_\varrho^P e^{-2/3(P^{3/2}-q_1^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{4^2}\int_\varrho^P\int_{q_2}^P e^{-2/3(q_1^{3/2}-q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2} - \cdots \Big\}$$
$$+ \left(\bar{c}_1 - \frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right) \left\{ - e^{-2/3(P^{3/2}-\varrho^{3/2})} + \frac{1}{4}\int_\varrho^P e^{-2/3(q_1^{3/2}-\varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} - \cdots \right\} \left.\right\}. \tag{10 b}$$

Dabei ist $\sqrt{\varrho}$ positiv zu nehmen. Die Formeln gelten, ihrer Ableitung gemäß, für jedes positive P; die Abhängigkeit von ϱ ist nur eine scheinbare (siehe § 9).

Von diesen Formeln (10) gehen wir aus, um die asymptotische Darstellung von v und v' zu finden. Zuerst zeigen wir, daß die einzelnen Glieder der Integralreihen bei unbeschränkt zunehmendem P einem Grenzwerte zustreben:

1. Als Grenzwert von $\int_{\varrho}^{P} e^{-4/3 q^{3/2}} \frac{dq}{q}$ kommt das uneigentliche Integral $\int_{\varrho}^{\infty} e^{-4/3 q^{3/2}} \frac{dq}{q}$.

2. Durch partielle Integration stellt man fest, daß:

$$\int_{\varrho}^{P} e^{-4/3 (P^{3/2} - q^{3/2})} \frac{dq}{q} = \frac{1}{2P^{3/2}}\left(1 + \frac{r}{P^{3/2}}\right), \text{ wobei } |r| \text{ in } P \text{ beschränkt ist.}$$

3. Das Doppelintegral $\int_{\varrho}^{P}\int_{q_1}^{P} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}$ ist erstreckt über ein Dreiecksgebiet E, auf dessen Hypothenuse der Integrand nicht mehr exponentiellen Charakter hat. Durch Abtrennung eines Randstückes zerlegen wir E in zwei Gebiete E_1 und E_2 (siehe Fig. 2). Das Integral über E_1 erstreckt bleibt bei wachsendem P beschränkt; ferner ist:

$$\int_{E_2} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2} < \int_{\varrho}^{P}\int_{q_2}^{q_2+d} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2} = \int_{\varrho}^{P} \lg\left(1 + \frac{d}{q_2}\right)\frac{dq_2}{q_2} < d \cdot \int_{\varrho}^{P} \frac{dq}{q^2} = d\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{P}\right).$$

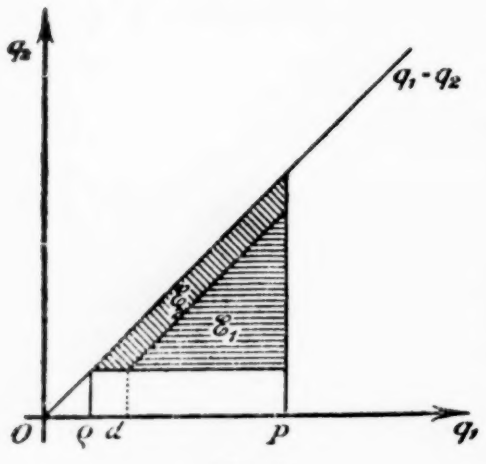


Fig. 2.

Folglich ist unser Doppelintegral beschränkt, und strebt als monotone Funktion gegen eine Grenze, das uneigentliche Integral $\int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}$ existiert also.

Alle anderen Integrale der Reihen in (10) lassen sich aber mit Hilfe obiger drei Integrale majorisieren. Dazu braucht man nur das Integrationsgebiet zu vergrößern, indem man jede zweite untere Integrationsgrenze durch ϱ ersetzt. Die vielfachen Integrale werden also majorisiert durch Produkte aus Integralen der drei obigen Arten 1, 2, 3. Damit ist ihre Beschränktkeit bewiesen. Auf Grund der Monotonie der Integrale, die P im Exponenten nicht enthalten, folgern wir, daß die entsprechenden uneigentlichen Integrale existieren; diejenigen aber, die P im Exponenten enthalten, verschwinden beim Grenzübergang; dies gilt auch vom Gliede $e^{-4/3 (P^{3/2} - \varrho^{3/2})}$.

§ 7.

Wir zeigen, daß die Reihen:

$$g_1 = 1 + \frac{1}{4^2}\int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}$$

$$+ \frac{1}{4^4}\int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_4}^{\infty}\int_{q_3}^{\infty}\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2} + q_3^{3/2} - q_4^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}\frac{dq_3}{q_3}\frac{dq_4}{q_4} + \cdots, \tag{11}$$

$$g_2 = \frac{1}{4}\int_{\varrho}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - \varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} + \frac{1}{4^3}\int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_3}^{\infty}\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2} + q_3^{3/2} - \varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}\frac{dq_3}{q_3} + \cdots$$

konvergieren, wenigstens für gewisse Werte von ϱ, und daß sie die Grenzwerte unserer vier Integralreihen aus (10) darstellen, für $P \to \infty$. Ferner wollen wir untersuchen, von welcher Ordnung in P die Differenz zwischen den vier Reihen und g_1 bzw. g_2 ist. Dazu betrachten wir die Differenz eines vielfachen Integrals und seines Grenzwertes. Es ist:

$$\int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_\nu}^{\infty}\int_{q_{\nu-1}}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} dq_1\cdots dq_\nu - \int_{\varrho}^{P}\int_{q_\nu}^{P}\int_{q_{\nu-1}}^{P}\cdots\int_{q_2}^{P} dq_1\cdots dq_\nu = \int_{P}^{\infty}\int_{q_\nu}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} dq_1\cdots dq_\nu$$

$$(12)\quad +\int_{\varrho}^{P}\int_{P}^{\infty}\int_{q_{\nu-1}}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} dq_1\cdots dq_\nu + \int_{\varrho}^{P}\int_{q_\nu}^{P}\int_{P}^{\infty}\int_{q_{\nu-2}}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} dq_1\cdots dq_\nu + \cdots$$

$$+\int_{\varrho}^{P}\int_{q_\nu}^{P}\int_{q_{\nu-1}}^{P}\cdots\int_{q_2}^{P}\int_{P}^{\infty} dq_1\cdots dq_\nu .$$

Unsere Zerlegungsformel (12) hat auch Gültigkeit, falls wir anstatt 1 irgendeine Funktion der q als Integranden einsetzen. Wir wollen noch folgende Bezeichnungen einführen:

$$i_1 = \int_{P}^{\infty} e^{-4/3 q^{3/2}}\frac{dq}{q};\quad i_2 = \int_{P}^{\infty}\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-q_2^{3/2})}\frac{dq_1}{q_2}\frac{dq_2}{q_2};\quad i_3 = \int_{\varrho}^{P}\int_{P}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-q_2^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}$$

und bemerken, daß die Integrale $\int_{\varrho}^{P} e^{-4/3 q^{3/2}}\frac{dq}{q}$ und $\int_{\varrho}^{P}\int_{q_2}^{P} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-q_2^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2}$ sowie alle drei Größen i unterhalb eines festen Bruchs Θ liegen für alle P, falls ϱ größer ist als eine feste Zahl ϱ_0.

Wir wenden nun die Zerlegungsformel (12) auf unsere Integraldifferenzen an; zunächst die Differenz der 2ν-fachen Integrale: Wir schätzen alle Glieder auf der rechten Seite unserer Zerlegungsgleichung (12) nach oben ab:

$$\int_{P}^{\infty}\int_{q_{2\nu}}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-q_2^{3/2}+\cdots+q_{2\nu-1}^{3/2}-q_{2\nu}^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}}$$

$$< \int_{P}^{\infty}\int_{q_{2\nu}}^{\infty}\int_{P}^{\infty}\int_{q_{2\nu-2}}^{\infty}\cdots\int_{P}^{\infty}\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-\cdots-q_{2\nu}^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}} = i_2^{\nu},$$

$$\int_{\varrho}^{P}\int_{P}^{\infty}\int_{q_{2\nu-1}}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-\cdots-q_{2\nu}^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}} < \int_{\varrho}^{P}\int_{P}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-q_2^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\frac{dq_2}{q_2} i_2^{\nu-1} = i_3\, i_2^{\nu-1},$$

$$\int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P}\int_{P}^{\infty}\cdots\int_{q_2}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-\cdots-q_{2\nu}^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}} < \Theta\, i_2^{\nu-1},\ \ldots,$$

$$\int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P}\cdots\int_{q_3}^{P}\int_{P}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-\cdots-q_{2\nu}^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}}$$

$$< \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P}\int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu-2}}^{P}\cdots\int_{\varrho}^{P}\int_{P}^{\infty} e^{-4/3 (q_1^{3/2}-\cdots-q_{2\nu}^{3/2})}\frac{dq_1}{q_1}\cdots\frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}} = \Theta^{\nu-1} i_3 .$$

Ebenso majorisiert man die Zerlegungsglieder, wenn es sich um die Differenz $(2\nu-1)$-facher Integrale handelt durch: $i_1 i_2^{\nu-1}$; $\Theta i_2^{\nu-1}$; $\Theta i_3 \cdot i_2^{\nu-2}$; $\cdots$; $\Theta^{\nu-1} i_3$.

Es sei für jedes P i die größte der drei Zahlen i_1, i_2, i_3, so ist:

$$\frac{1}{4^{2\nu}} \int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_{2\nu}}^{\infty} \cdots \int_{q_2}^{\infty} e^{-{}^4/_3 (q_1^{3/2} - \cdots - q_{2\nu}^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \cdots \frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}} - \frac{1}{4^{2\nu}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P} \cdots \int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3 (q_1^{3/2} - \cdots - q_{2\nu}^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \cdots \frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}}$$
$$< \frac{2\nu}{4^{2\nu}} i \Theta^{\nu-1},$$

$$\frac{1}{4^{2\nu+1}} \int_{\varrho}^{\infty}\int_{q_{2\nu+1}}^{\infty} \cdots \int_{q_2}^{\infty} e^{-{}^4/_3 (q_1^{3/2} - \cdots + q_{2\nu+1}^{3/2} - \varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \cdots \frac{dq_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}}$$
$$- \frac{1}{4^{2\nu+1}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu+1}}^{P} \cdots \int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3 (q_1^{3/2} - \cdots - \varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \cdots \frac{dq_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}} < \frac{2\nu+1}{4^{2\nu+1}} e^{{}^4/_3 \varrho^{3/2}} i \Theta^{\nu}.$$

§ 8.

Für die Integralglieder, die P im Exponenten besitzen, bedarf es keiner Zerlegungsformel; denn ihr Grenzwert ist 0, die absolute Differenz zwischen Integralglied und Grenzwert also gleich dem absoluten Betrag des Integralglieds. Wir führen noch eine vierte Abschätzungsgröße ein: $i_4 = \int_{\varrho}^{P} e^{-{}^4/_3 (P^{3/2} - q^{3/2})} \frac{dq}{q}$, i soll von nun ab für jedes P die größte der vier Zahlen i_1, i_2, i_3, i_4 sein.

$$\frac{1}{4^{2\nu}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu}}^{P} \cdots \int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3 (P^{3/2} - q_1^{3/2} + \cdots + q_{2\nu}^{3/2} - \varrho^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \cdots \frac{dq_{2\nu}}{q_{2\nu}}$$
$$< \frac{1}{4^{2\nu}} i_4 \left(\int_{\varrho}^{P}\int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \frac{dq_2}{q_2} \right)^{\nu-1} \int_{\varrho}^{P} e^{-{}^4/_3 q^{3/2}} \frac{dq}{q} e^{{}^4/_3 \varrho^{3/2}} < \frac{e^{{}^4/_3 \varrho^{3/2}}}{4^{2\nu}} i_4 \Theta^{\nu},$$

$$\frac{1}{4^{2\nu+1}} \int_{\varrho}^{P}\int_{q_{2\nu+1}}^{P} \cdots \int_{q_2}^{P} e^{-{}^4/_3 (P^{3/2} - q_1^{3/2} + \cdots + q_{2\nu}^{3/2} - q_{2\nu+1}^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \cdots \frac{dq_{2\nu+1}}{q_{2\nu+1}} < \frac{1}{4^{2\nu+1}} i_4 \Theta^{\nu}.$$

Damit ist die Reihe der absoluten Beträge der Differenzen zwischen den Gliedern der Integralreihen und deren jeweiligen Grenzwerten majorisiert durch eine mit i multiplizierte konvergente Potenzreihe in Θ. Hieraus folgt: erstens, daß die Reihen (11) für g_1 und g_2 auch wirklich konvergieren; zweitens, daß sich g_1 und g_2 von den entsprechenden Integralreihen in (10) durch Größen unterscheiden, die in P dieselbe Ordnung haben wie die Funktion i (bzw. $e^{-{}^4/_3 P^{3/2}}$ oder i).

Wir müssen also untersuchen, wie die Funktionen i_1, i_2, i_3, i_4 sich für große Werte von P verhalten. Wir wissen schon, daß $i_4 = \frac{r}{P^{3/2}}$, wo r eine in P beschränkte Funktion sein soll. Für i_4 besteht sogar die semi-konvergente Reihe:

$$\int_{\varrho}^{P} e^{-{}^4/_3 (P^{3/2} - q^{3/2})} \frac{dq}{q} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{P^{3/2}} + 1! \left(\frac{3}{4}\right) \frac{1}{P^{6/2}} + \cdots + \nu! \left(\frac{3}{4}\right)^{\nu} \frac{\varrho}{P^{3/2(\nu+1)}} + \frac{r_{\nu+1}}{P^{3/2(\nu+1)}} \right\},$$

wobei $|r_{\nu+1}|$ in P beschränkt ist; das läßt sich durch wiederholte partielle Integration zeigen. Ferner ist

$$i_1 = \int_P^\infty e^{-4/3 q^{3/2}} \frac{dq}{q} < \int_P^\infty q^{1/2} e^{-4/3 q^{3/2}} dq = \frac{1}{2} e^{-4/3 P^{3/2}}.$$

Nun bleiben noch i_2 und i_3 abzuschätzen; es ist bequemer, ihre Summe $i' = i_2 + i_3$ abzuschätzen. i' besteht aus einem Flächenintegral mit dem Integranden $e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{1}{q_1 q_2}$, erstreckt über einen unendlichen Bereich in Form eines nach rechts offenen Trapezes. Dieser Bereich grenzt an die Gerade $q_1 = q_2$, auf der der Integrand relativ groß wird. Um eine günstigere Abschätzung zu bekommen, sondern wir einen Randstreifen ab, indem wir dabei das Integrationsgebiet noch ein wenig vergrößern (siehe Fig. 3). Es zerfällt dabei das Gebiet in drei Teilgebiete F_1, F_2, F_3; in jedem dieser Teilgebiete nehmen wir die Abschätzung entsprechend vor:

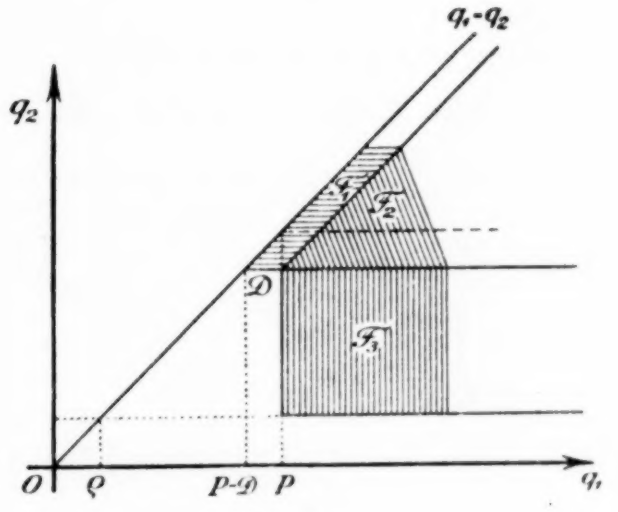


Fig. 3.

$$\text{In } F_1: \int_{P-D}^\infty \int_{q_2}^{q_2+D} e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \frac{dq_2}{q_2} < \int_{P-D}^\infty \int_{q_2}^{q_2+D} \frac{dq_1}{q_1} \frac{dq_2}{q_2}$$

$$= \int_{P-D}^\infty \frac{1}{q} \lg\left(1 + \frac{D}{q}\right) dq < D \int_{P-D}^\infty \frac{dq}{q^2} = \frac{D}{P - D}.$$

Dabei ist D eine feste positive Zahl.

In jedem Punkte des Gebiets $F_2 + F_3$ ist $q_2 \leqq q_1 - D$, also $q_2^{3/2} \leqq q_1^{3/2} \left(1 - \frac{D}{q_1}\right)^{\frac{3}{2}}$;

$$q_1^{3/2} - q_2^{3/2} \geqq q_1^{3/2} \left(1 - \left(1 - \frac{D}{q_1}\right)^{3/2}\right) \geqq \frac{3}{4} D q_1^{1/2}, \text{ falls } \frac{D}{q_1} < \frac{1}{2} \text{ etwa, also } D < \frac{\varrho}{2}.$$

Wählen wir die feste Zahl D kleiner als $\frac{\varrho}{2}$, so wird in F_3:

$$\int_\varrho^{P-D} \int_P^\infty e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \frac{dq_2}{q_2} < \int_\varrho^{P-D} \int_P^\infty \frac{e^{-D q_1^{1/2}}}{q_1^{1/2} q_2} dq_1 dq_2 = \frac{2}{D} e^{-D P^{1/2}} \lg \frac{P - D}{\varrho},$$

falls wir $\varrho > 1$ annehmen, was früheren Voraussetzungen nicht widerspricht, und in F_2:

$$\int_{P-D}^\infty \int_{q_2+D}^\infty e^{-4/3 (q_1^{3/2} - q_2^{3/2})} \frac{dq_1}{q_1} \frac{dq_2}{q_2} < \int_{P-D}^\infty \int_{q_2+D}^\infty \frac{e^{-D q_1^{1/2}}}{q_2^2} dq_1 dq_2 < \int_{P-D}^\infty \int_P^\infty \frac{e^{-D q_1^{1/2}}}{q_2^2} dq_1 dq_2 = \frac{1}{P - D} \int_P^\infty e^{-D q^{1/2}} dq.$$

Folglich ist i' und auch i gleich $\frac{1}{P}$, multipliziert mit einer Funktion von P, die beschränkt ist für $P > P_0$.

§ 9.

Unsere vier Integralreihen in (10) sind also gleich:

$$g_1 + \frac{r_1}{P}; \quad g_2 + \frac{r_2}{P}; \quad g_1 + \frac{r_3}{P}; \quad g_2 + \frac{r_4}{P},$$

wobei $|r_1|$, $|r_2|$, $|r_3|$, $|r_4|$ in P beschränkt sind für große P.

$$(13)\quad \begin{aligned} v(P) &= \frac{1}{2}\,\varrho^{1/4}\,P^{-1/4}\,e^{2/3\,(P^{3/2}-\varrho^{3/2})}\left\{\left(\bar{c}_1+\frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right)\left(g_1+\frac{r_1}{P}\right)+\left(\bar{c}_1-\frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right)\left(g_2+\frac{r_2}{P}\right)\right\}\\ v'(P) &= \frac{1}{2}\,\varrho^{1/4}\,P^{1/4}\,e^{2/3\,(P^{3/2}-\varrho^{3/2})}\left\{\left(\bar{c}_1+\frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right)\left(g_1+\frac{r_3}{P}\right)+\left(\bar{c}_1-\frac{\bar{c}_2}{\sqrt{\varrho}}\right)\left(g_2+\frac{r_4}{P}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{c}_1 = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2$; $\bar{c}_2 = c_1\gamma_3 + c_2\gamma_4$.

Die γ sind durch beständig und sehr gut konvergierende Reihen gegeben:

$$(14)\quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\varrho^{3\nu}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3\nu-1)\cdot3\nu}; & \gamma_2 &= \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\varrho^{3\nu+1}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdots3\nu\cdot(3\nu+1)}\\ \gamma_3 &= \sum_0^\infty{}_\nu \frac{3\nu\,\varrho^{3\nu-1}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3\nu-1)\cdot3\nu}; & \gamma_4 &= \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(3\nu+1)\,\varrho^{3\nu}}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdots3\nu\cdot(3\nu+1)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

$$(15)\quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\,\varrho^{1/4}e^{-2/3\,\varrho^{3/2}}\left\{\gamma_1(g_1+g_2)+\frac{\gamma_3}{\sqrt{\varrho}}(g_1-g_2)\right\}\\ C_2 &= \frac{1}{2}\,\varrho^{1/4}e^{-2/3\,\varrho^{3/2}}\left\{\gamma_2(g_1+g_2)+\frac{\gamma_4}{\sqrt{\varrho}}(g_1-g_2)\right\}. \end{aligned}$$

Diese Größen sind positiv und verschwinden nicht. Denn es ist $g_1 - g_2$ nicht negativ; setzen wir nämlich in Formel (10) $\bar{c}_1 = 0$ und $\bar{c}_2 > 0$, so muß, wie aus der Form der Differentialgleichung sich ergibt, $v(P)$ positiv für $P > \varrho$ sein; folglich auch die Reihe:

$$1 - e^{-4/3\,(P^{3/2}-\varrho^{3/2})} + \frac{1}{4}\int_\varrho^P e^{-4/3\,(P^{3/2}-q^{3/2})}\frac{dq}{q} - \frac{1}{4}\int_\varrho^P e^{-4/3\,(q^{3/2}-\varrho^{3/2})}\frac{dq}{q} + \cdots,$$

und es kann infolgedessen ihr Grenzwert $g_1 - g_2$ für $P \to \infty$ nicht negativ sein.

Setzen wir noch:

$$(15\,a)\quad \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{C_1}\left\{r_1\left(\gamma_1+\frac{\gamma_3}{\sqrt{\varrho}}\right)+r_2\left(\gamma_1-\frac{\gamma_3}{\sqrt{\varrho}}\right)\right\}; & R_2 &= \frac{1}{C_2}\left\{r_1\left(\gamma_2+\frac{\gamma_4}{\sqrt{\varrho}}\right)+r_2\left(\gamma_2-\frac{\gamma_4}{\sqrt{\varrho}}\right)\right\}\\ R_3 &= \frac{1}{C_1}\left\{r_3\left(\gamma_1+\frac{\gamma_3}{\sqrt{\varrho}}\right)+r_4\left(\gamma_1-\frac{\gamma_3}{\sqrt{\varrho}}\right)\right\}; & R_4 &= \frac{1}{C_2}\left\{r_3\left(\gamma_2+\frac{\gamma_4}{\sqrt{\varrho}}\right)+r_4\left(\gamma_2-\frac{\gamma_4}{\sqrt{\varrho}}\right)\right\}, \end{aligned}$$

so können wir schreiben:

$$(16)\quad \begin{aligned} v(P) &= P^{-1/4}e^{2/3\,P^{3/2}}\left\{c_1C_1\left(1+\frac{R_1}{P}\right)+c_2C_2\left(1+\frac{R_2}{P}\right)\right\}\\ v'(P) &= P^{1/4}e^{2/3\,P^{3/2}}\left\{c_1C_1\left(1+\frac{R_3}{P}\right)+c_2C_2\left(1+\frac{R_4}{P}\right)\right\}, \end{aligned}$$

wobei die R Funktionen von P und ϱ sind, die bei festem $\varrho > \varrho_0$ in P beschränkt sind für $P > P_0$; es ist vorausgesetzt $c_1, c_2 \geqq 0$.

Die Abhängigkeit der rechten Seite von ϱ ist nur eine scheinbare; setzen wir z. B. $c_2 = 0$, $c_1 = 1$, so wird, bei festem $\varrho > \varrho_0$: $\lim_{P\to\infty} \dfrac{v(P)}{P^{-1/4}e^{2/3\,P^{3/2}}} = C_1$,

woraus folgt, daß C_1 und ebenso C_2 von ϱ nicht abhängen; nun ist aber für $c_2 = 0$ $R_1 = P\left(\dfrac{v(P)\,P^{1/4}}{c_1\,C_1\,e^{2/3\,P^{3/2}}} - 1\right)$, also auch von ϱ unabhängig; ebenso R_2, R_3, R_4. Ferner können wir auch die Einschränkung $c_1, c_2 \geqq 0$ fallen lassen, die zur Anwendung des Sturmschen Satzes bequem war. Dies ergibt sich daraus, daß $v(P)$ linear zusammengesetzt ist aus den linear unabhängigen Lösungen:

$$C_1 P^{-1/4} e^{2/3 P^{3/2}}\left(1 + \frac{R_1}{P}\right) \quad \text{und} \quad C_2 P^{-1/4} e^{2/3 P^{3/2}}\left(1 + \frac{R_2}{P}\right),$$

die bei $P = 0$ die Werte 1 und 0 annehmen, sowie $v'(P)$ aus deren Ableitungen, die bei $P = 0$ gleich 1 bzw. 0 werden.

Daraus ergibt sich ferner, daß die Funktionaldeterminante

$$e^{1/3 P^{3/2}} \begin{vmatrix} C_1\left(1 + \frac{R_1}{P}\right) & C_2\left(1 + \frac{R_2}{P}\right) \\ C_1\left(1 + \frac{R_3}{P}\right) & C_2\left(1 + \frac{R_4}{P}\right) \end{vmatrix}$$

den konstanten Wert 1 besitzt.

Diese Formel werden wir noch gebrauchen.

§ 10.

Wir können nun das Resultat dieser Untersuchung formulieren: *Es sei v eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{v''}{v} = x$, für die an der Stelle $x = 0$ $v = c_1$, $v' = c_2$ ist, und es sei P eine positive Zahl, so ist:*

$$v(P) = P^{-1/4} e^{2/3 P^{3/2}}\left\{c_1 C_1\left(1 + \frac{R_1}{P}\right) + c_2 C_2\left(1 + \frac{R_2}{P}\right)\right\}$$

$$v'(P) = P^{1/4} e^{2/3 P^{3/2}}\left\{c_1 C_1\left(1 + \frac{R_3}{P}\right) + c_2 C_2\left(1 + \frac{R_4}{P}\right)\right\},$$

wobei $|R_1|, |R_2|, |R_3|, |R_4|$ für $P > P_0$ in P beschränkt sind. Dabei sind C_1 und C_2 konstante Zahlen, die sich durch gut konvergente Reihen ausrechnen lassen.

II. Die Besselsche Funktion.

§ 1.

Die Besselsche Funktion $I_n(x)$ genügt der Differentialgleichung:

$$I_n''(x) + \frac{1}{x} I_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) I_n(x) = 0,$$

die für $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit besitzt. In diesem Punkte bleibt die Besselsche Funktion endlich, und es ist $\lim_{x \to 0} x^{-n} I_n(x) = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$. Für uns kommen nur positive Werte von x und n in Betracht. Das Glied erster Ordnung in der Differentialgleichung kann beseitigt werden durch die Transformation $w_n(x) = \sqrt{x} \cdot I_n(x)$, wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist; mit dieser Funktion $w_n(x)$ wollen wir uns beschäftigen. Sie genügt der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{w_n''(x)}{w_n(x)} = \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - 1 = q(x)$$

und wird dargestellt durch die Reihe:

$$(2) \quad w_n(x) = \frac{x^{n+1/2}}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{1!\,2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2!\,2^4(n+1)(n+2)} - \cdots\right\},$$

die für alle Werte von x konvergiert.

Es ist nicht möglich, aus dieser Reihe direkt das asymptotische Verhalten von w_n an der Stelle an (wo $a > 0$) abzulesen. Betrachten wir aber w_n an einer Stelle n^ζ, wobei $\zeta < \frac{1}{2}$, so bekommen wir unter Anwendung der Stirlingschen Formel, und indem

wir berücksichtigen, daß der Klammerausdruck sich bei wachsendem n nunmehr der 1 nähert:

$$w_n(n^\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, n^{(\zeta-1)n}\, n^{\frac{\zeta-1}{2}} \left(\frac{e}{2}\right)^n \frac{1 + n^{2\zeta-1} r_1}{1 + n^{-1/5} r_2},$$

also falls $\frac{2}{5} \leqq \zeta < \frac{1}{2}$:

$$w_n(n^\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, n^{(\zeta-1)n}\, n^{\frac{\zeta-1}{2}} \left(\frac{e}{2}\right)^n (1 + n^{2\zeta-1} r), \tag{3}$$

im Falle $\zeta \leqq \frac{2}{5}$ aber:

$$w_n(n^\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, n^{(\zeta-1)n}\, n^{\frac{\zeta-1}{2}} \left(\frac{e}{2}\right)^n (1 + n^{-1/5} r); \tag{3a}$$

hierbei sind r_1, r_2, r Funktionen von n, die für große Werte dieser Variablen dem absoluten Betrage nach beschränkt sind.

§ 2.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Bezeichnung ein: $N = +\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$; die rechte Seite q unserer Differentialgleichung (1) ist eine monoton abnehmende Funktion von x, die an der Stelle $x = 0$ unendlich groß wird und bei $x = N$ verschwindet. Wir werden $w_n(x)$ nicht an der Stelle $a\,n$, sondern zunächst an der Stelle $a\,N$ untersuchen, wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht. Wir klemmen die rechte Seite unserer Differentialgleichung zwischen zwei Treppenwege ein, derart, daß erstens die singuläre Stelle 0 abgesondert wird und zweitens die Konstruktion bei wachsendem n erhalten bleibt; als Stufen benutzen wir etwa horizontale Geradenstücke, dabei gestaltet sich die Rechnung am einfachsten. (Ebenso könnten wir aber z. B. Stücke kubischer Hyperbeln verwenden, welche, als rechte Seite benutzt, Differentialgleichungen vom Eulerschen Typus liefern und sich zur Rechnung gleichfalls eignen.)

Es seien θ und a positive Zahlen, die nicht von n unabhängig zu sein brauchen, wohl aber der Ungleichung genügen sollen $0 < \theta < a < 1$; ferner sei k eine natürliche Zahl, $\frac{a-\theta}{k} = \Delta$, $d_\nu = \theta + \nu\Delta$, $x_\nu = d_\nu N$. Es soll dann sein $\mathfrak{T}_o = q(x_\nu)$ im Intervall x_ν bis $x_{\nu+1}$; $\mathfrak{T}_u = q(x_{\nu+1})$ in diesem selben Intervall. Es ist dann von θN bis $a\,N$:

$$0 < \mathfrak{T}_u \leqq q(x) \leqq \mathfrak{T}_o \quad \text{(siehe Fig. 4);}$$

$w^u_{n,k}$ und $w^o_{n,k}$ sollen Funktionen sein, die von θN bis $a\,N$ samt ihrer ersten Ableitung stetig sind, an der Stelle θN Wert und Ableitung von $w_u(\theta N) = \sqrt{\theta N} \cdot I_n(\theta N)$ als Randwerte annehmen, und im Intervalle θN bis aN der Differentialgleichung $\frac{w''}{w} = \mathfrak{T}_u$ bzw. $\frac{w''}{w} = \mathfrak{T}_o$ genügen.

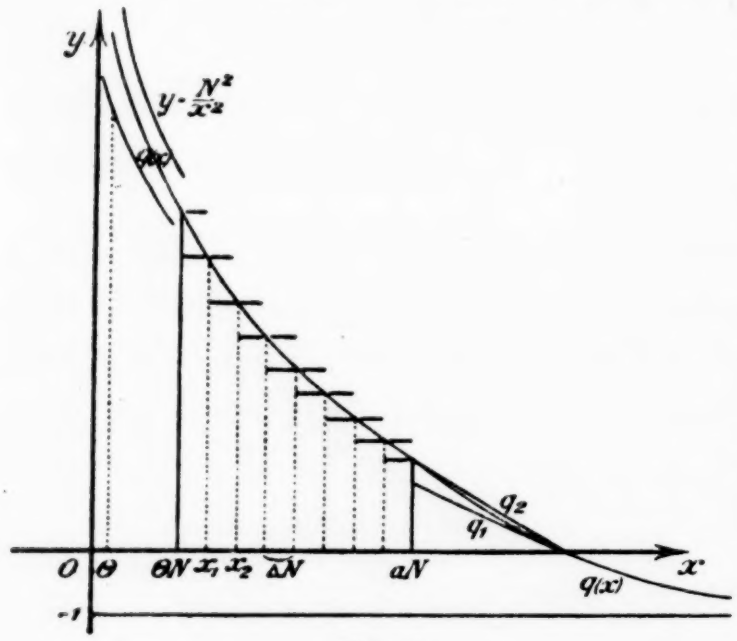


Fig. 4.

Die Funktionen w, w^u, w^o können im Intervall θN bis aN nicht verschwinden, da die rechte Seite der Differentialgleichungen, denen sie genügen, positiv ist (Bedingung $a < 1$) und wir ferner θ so wählen werden, daß $w_n(\theta N)$ und $w'_n(\theta N)$ von einem festen n ab beide positiv sind. Unter Anwendung des Sturmschen Satzes finden wir also:

$$w^u_{n,k}(a\,N) \leqq w_n(a\,N) \leqq w^o_{n,k}(a\,N); \text{ ebenso: } w^{u'}_{n,k}(a\,N) \leqq w'_n(a\,N) \leqq w^{o'}_{n,k}(a\,N). \tag{4}$$

§ 3.

Wir können die Werte von w und w' bei θN, welche wir zur Ausrechnung von w^u und w^o brauchen, direkt aus der Potenzreihe (2) für w bzw. aus (3 a) bekommen in Form asymptotischer Ausdrücke, indem wir θ mit N koppeln, und zwar derart, daß $\theta N < N^{2/5}$.

Setzen wir also $\theta = N^{-\tau}$, $\tau > \frac{3}{5}$; es ist

$$w_n(\theta N) = \frac{(\theta N)^{n+1/2}}{2^n \Gamma(n+1)}\left(1 + \frac{r}{N^{1/5}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\, e^{N\left(1+\lg\frac{\theta}{2}\right)}\left(1 + \frac{r}{N^{1/5}}\right)\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\, e^{n\lg\frac{N}{n}}\, e^{(n-N)\left(1+\lg\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$w_n(\theta N) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\, e^{\left(1+\lg\frac{\theta}{2}\right)N}\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{N^{1/5}}\right), \qquad \text{und ebenso} \tag{5}$$

$$w_n'(\theta N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{\left(1+\lg\frac{\theta}{2}\right)N}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{N^{1/5}}\right);$$

bei festem $\tau > \frac{3}{5}$ sind dabei ε_1, ε_2 Funktionen von N allein, welche dem absoluten Betrage nach für große Werte dieser Variablen beschränkt sind. Der weitere Verlauf der Rechnung wird zeigen, daß diese spezielle Koppelung $\theta = N^{-\tau}$, $\tau > \frac{3}{5}$ zum Ziele führt, die Grenzübergänge lassen sich trotz dieser Einschränkung durchführen. Da wir dies a priori nicht wissen konnten, ist es methodisch wertvoll zu bemerken, daß wir auch volle Freiheit für die spätere Verwendung von θ hätten wahren können, indem wir die Potenzreihe (2) bloß bis zu einer festen (also von N zunächst unabhängigen) Stelle θ benutzten, und die rechte Seite q der Differentialgleichung von θ bis θN zwischen zwei Wege $\frac{N^2}{x^2}$ und $\left(1 - \theta^2 \frac{n^2}{n^2-1}\right)\frac{N^2}{x^2}$ einklemmten (siehe Fig. 4).

§ 4.

Untersuchen wir jetzt den Aufbau von $w^o_{n,k}$.

Wir setzen:

$$p(x) = \frac{+\sqrt{1-x^2}}{x};\ p(d_\nu) = p_\nu;\ Dp_\nu = p_\nu - p_{\nu-1};\ \text{ es ist dann } +\sqrt{q(x_\nu)} = p_\nu.$$

Aus der Differentialgleichung $\frac{w''}{w} = \mathfrak{T}_o$ ergeben sich — unter Berücksichtigung der Stetigkeit von w^o und w'^o an den Stellen x_ν — die Rekursionsformeln:

$$w^o_{n,k}(x_{\nu+1}) = \frac{1}{2}\, e^{p_\nu \Delta N}\left(w^o_{n,k}(x_\nu) + \frac{1}{p_\nu}\, w^{o\prime}_{n,k}(x_\nu)\right) + \frac{1}{2}\, e^{-p_\nu \Delta N}\left(w^o_{n,k}(x_\nu) - \frac{1}{p_\nu}\, w^{o\prime}_{n,k}(x_\nu)\right)$$

$$w^{o\prime}_{n,k}(x_{\nu+1}) = \frac{1}{2}\, e^{p_\nu \Delta N}\left(p_\nu\, w^o_{n,k}(x_\nu) + w^{o\prime}_{n,k}(x_\nu)\right) - \frac{1}{2}\, e^{-p_\nu \Delta N}\left(p_\nu\, w^o_{n,k}(x_\nu) - w^{o\prime}_{n,k}(x_\nu)\right) \tag{6}$$

für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$. Wir halten uns in diesem Paragraphen aus heuristischen Gründen an die Fiktion, θ sei eine feste (von N unabhängige) Zahl. Es gelten nun für w^o und $w^{o\prime}$ an der Stelle x_ν die asymptotischen Formeln:

$$w^o_{n,k}(x_\nu) = A_\nu\, e^{\alpha_\nu N}\,(1 + N^{-1/5} E_\nu);\ w^{o\prime}_{n,k}(x_\nu) = B_\nu\, e^{\alpha_\nu N}\,(1 + N^{-1/5} H_\nu),$$

wobei A_ν, B_ν, α_ν von N unabhängig sein sollen (während θ in diese Größen eingehen darf); E_ν, H_ν sollen Funktionen von N sein, für große Werte von N beschränkt (bei festem θ, k, a, ν). Dann ergibt die Rechnung, daß sich diese Ausdrücke „regenerieren", d. h. es wird:

$$w^o_{n,k}(x_{\nu+1}) = A_{\nu+1}\, e^{\alpha_{\nu+1}N}\,(1 + N^{-1/5} E_{\nu+1});\ w^{o'}_{n,k}(x_{\nu+1}) = B_{\nu+1}\, e^{\alpha_{\nu+1}N}\,(1 + N^{-1/5} H_{\nu+1}),$$

wobei die Größen $A_{\nu+1}$, $B_{\nu+1}$, $\alpha_{\nu+1}$, $E_{\nu+1}$, $H_{\nu+1}$ dieselben Eigenschaften haben in bezug auf N wie die entsprechenden Größen, welche dem Index ν zugeordnet sind. Das am Ende des vorigen Paragraphen geschilderte Verfahren liefert für $w^o_{n,k}$ und dessen Ableitung an der Stelle $x_0 = \theta N$ Ausdrücke dieses selben Typus; folglich werden $w^o_{n,k}(aN)$ und $w^{o'}_{n,k}(aN)$ durch Ausdrücke derselben Form dargestellt. Dasselbe gilt für die untere Approximationsfunktion $w^u_{n,k}$. Es wird:

$$w^o_{n,k}(aN) = A_k\, e^{a_k N}\,(1 + E_k N^{-1/5});\ w^u_{n,k}(aN) = \bar{A}_k\, e^{\bar{a}_k N}\,(1 + \bar{E}_k N^{-1/5})$$
$$w^{o'}_{n,k}(aN) = B_k\, e^{a_k N}\,(1 + H_k N^{-1/5});\ w^{u'}_{n,k}(aN) = \bar{B}_k\, e^{\bar{a}_k N}\,(1 + \bar{H}_k N^{-1/5}).$$

Eine kurze Rechnung zeigt ferner, daß $\lim_{\theta\to 0}\lim_{k\to\infty} \alpha_k$ existiert und gleich ist dem entsprechend gebildeten Grenzwert von $\bar{\alpha}_k$; dasselbe gilt von den Größen A_k, $\bar{A}_k$ und B_k, $\bar{B}_k$. (Dagegen wissen wir nicht, was aus E und H dabei wird.)

§ 5.

So weit die heuristische Betrachtung; sie zeigt uns, auf welche Art die Zerlegung in Hauptteil und Restglied vorzunehmen ist.

Wir setzen in die Rekursionsformeln (6) ein:

$$w^o_{n,k}(x_\nu) = A_\nu\, e^{\alpha_\nu N}\,(1 + N^{-1/5} E_\nu);\ w^{o'}_{n,k}(x_\nu) = B_\nu\, e^{\alpha_\nu N}\,(1 + N^{-1/5} H_\nu)$$
$$w^o_{n,k}(x_{\nu+1}) = A_{\nu+1}\, e^{\alpha_{\nu+1}N}\,(1 + N^{-1/5} E_{\nu+1});\ w^{o'}_{n,k}(x_{\nu+1}) = B_{\nu+1}\, e^{\alpha_{\nu+1}N}\,(1 + N^{-1/5} H_{\nu+1})$$

(6 a) sowie

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \Delta p_\nu;\ A_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(A_\nu + \frac{1}{p_\nu} B_\nu\right);\ B_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(p_\nu A_\nu + B_\nu\right) \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, k-1,$$

welche letzteren Formeln wir der im vorigen Paragraphen skizzierten Rechnung entnehmen; es wird dann:

$$2 B_{\nu+1} E_{\nu+1} = p_\nu A_\nu E_\nu + B_\nu H_\nu + N^{1/5} e^{-2p_\nu \Delta N}\left\{p_\nu A_\nu\left(1 + \frac{E_\nu}{N^{1/5}}\right) - B_\nu\left(1 + \frac{H_\nu}{N^{1/5}}\right)\right\}$$

(7) für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1.$

$$2 B_{\nu+1} H_{\nu+1} = p_\nu A_\nu E_\nu + B_\nu H_\nu - N^{1/5} e^{-2p_\nu \Delta N}\left\{p_\nu A_\nu\left(1 + \frac{E_\nu}{N^{1/5}}\right) - B_\nu\left(1 + \frac{H_\nu}{N^{1/5}}\right)\right\}.$$

Aus den drei letzten Formeln (6 a) und der Forderung $w^o_{n,k}(x_0) = w_n(\theta N)$; $w^{o'}_{n,k}(x_0) = w'_n(\theta N)$ lassen sich α_k, A_k, B_k ausrechnen, unter Anwendung von Formel (5):

$$B_\nu = p_{\nu-1} A_\nu, \text{ also } A_{\nu+1} = A_\nu \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_{\nu-1}}{p_\nu}\right),\ B_{\nu+1} = \frac{1}{2} B_\nu\left(1 + \frac{p_\nu}{p_{\nu-1}}\right) \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, k-1,$$

daraus folgt:

$$(8)\quad \begin{cases} A_k = A_1 \prod_1^{k-1}{}_\nu \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_{\nu-1}}{p_\nu}\right) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\, \frac{1 + \sqrt{1-\theta^2}}{2\sqrt{1-\theta^2}} \prod_1^{k-1}{}_\nu \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_{\nu-1}}{p_\nu}\right) \\ B_k = B_1 \prod_1^{k-1}{}_\nu \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_\nu}{p_{\nu-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, \frac{1 + \sqrt{1-\theta^2}}{2} \prod_1^{k-1}{}_\nu \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_\nu}{p_{\nu-1}}\right) \\ \alpha_k = 1 + \lg\frac{\theta}{2} + \Delta \cdot \sum_0^{k-1}{}_\nu p_\nu. \end{cases}$$

Ganz analog bekommt man auf dem unteren Wege unter Verwendung der entsprechenden Rekursionsformeln, die sich nur durch die Ersetzung von p_ν durch $p_{\nu+1}$ von diesen

unterscheiden:

$$\bar{\alpha}_k = 1 + \lg\frac{\theta}{2} + \Delta \sum_1^k p_\nu \tag{8 a}$$

$$\bar{A}_k = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\,\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\theta p_1}\Big)\prod_1^{k-1}{}_\nu\,\frac{1}{2}\Big(1+\frac{p_\nu}{p_{\nu+1}}\Big); \qquad \bar{B}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\,\frac{1}{2}(1+\theta p_1)\prod_1^{k-1}{}_\nu\,\frac{1}{2}\Big(1+\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}\Big).$$

§ 6.

E_k und H_k müssen nun in brauchbarer Form dargestellt werden. Aus den Doppelrekursionsformeln (7) für $E_{\nu+1}$ und $H_{\nu+1}$ leiten wir zunächst Beziehungen ab, die uns $E_{\nu+1}$ als Funktion aller vorangehenden E und eines einzigen H geben, und ebenso $H_{\nu+1}$ als Funktion aller vorangehenden H und eines einzigen E.

Es ist $B_\nu = p_{\nu-1}A_\nu$; $p_\nu A_\nu = B_\nu + A_\nu Dp_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$; daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2B_{\nu+1}E_{\nu+1} &= B_\nu(E_\nu + H_\nu) + B_\nu e^{-2p_\nu\Delta N}(E_\nu - H_\nu) + A_\nu E_\nu Dp_\nu \\ &\quad + N^{1/5}A_\nu Dp_\nu e^{-2p_\nu\Delta N}\Big(1+\frac{E_\nu}{N^{1/5}}\Big) \\ 2B_{\nu+1}H_{\nu+1} &= B_\nu(E_\nu + H_\nu) - B_\nu e^{-2p_\nu\Delta N}(E_\nu - H_\nu) + A_\nu E_\nu Dp_\nu \\ &\quad - N^{1/5}A_\nu Dp_\nu e^{-2p_\nu\Delta N}\Big(1+\frac{E_\nu}{N^{1/5}}\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} B_{\nu+1}(E_{\nu+1} + H_{\nu+1}) &= B_\nu(E_\nu + H_\nu) + A_\nu E_\nu Dp_\nu \\ B_{\nu+1}(E_{\nu+1} - H_{\nu+1}) &= B_\nu e^{-2p_\nu\Delta N}(E_\nu - H_\nu) + N^{1/5}A_\nu Dp_\nu\Big(1+\frac{E_\nu}{N^{1/5}}\Big)e^{-2p_\nu\Delta N}. \end{aligned} \tag{9 a}$$

Ebenso folgt aus $\dfrac{B_{\nu+1}}{p_\nu} = A_{\nu+1}$ und $\dfrac{B_\nu}{p_\nu} = A_\nu - A_\nu\dfrac{Dp_\nu}{p_\nu}$:

$$\begin{aligned} A_{\nu+1}(E_{\nu+1} + H_{\nu+1}) &= A_\nu(E_\nu + H_\nu) - A_\nu\frac{Dp_\nu}{p_\nu}H_\nu \\ A_{\nu+1}(E_{\nu+1} - H_{\nu+1}) &= A_\nu e^{-2p_\nu\Delta N}(E_\nu - H_\nu) + N^{1/5}A_\nu\frac{Dp_\nu}{p_\nu}e^{-2p_\nu\Delta N}\Big(1+\frac{H_\nu}{N^{1/5}}\Big). \end{aligned} \tag{9′ a}$$

Diese Formeln gelten alle für $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$. Aus der ersten Formel in (9) gewinnen wir mit Hilfe von (9 a) durch Rekursion folgenden Ausdruck für $E_{\nu+1}$:

$$E_{\nu+1} = N^{1/5}\mathfrak{e}_\nu + (E_1+H_1)\mathfrak{f}_\nu + (E_1-H_1)\mathfrak{g}_\nu + E_\nu c_{\nu,\nu} + E_{\nu-1}c_{\nu,\nu-1} + \cdots + E_1 c_{\nu,1}, \tag{10}$$

wo:

$$\begin{cases} c_{\nu,\mu} = \dfrac{A_\mu}{2B_{\nu+1}}\,(1 + e^{-2(p_\nu + p_{\nu-1} + \cdots + p_\mu)\Delta N})\,Dp_\mu \\ \mathfrak{e}_\nu = \dfrac{A_\nu}{2B_{\nu+1}}\,e^{-2p_\nu\Delta N}Dp_\nu + \dfrac{A_{\nu+1}}{2B_{\nu+1}}\,e^{-2(p_\nu+p_{\nu-1})\Delta N}Dp_{\nu-1} + \cdots \\ \qquad\qquad + \dfrac{A_1}{2B_{\nu+1}}\,e^{-2(p_\nu+\cdots+p_1)\Delta N}Dp_1 \\ \mathfrak{f}_\nu = \dfrac{B_1}{2B_{\nu+1}}; \quad \mathfrak{g}_\nu = \dfrac{B_1}{2B_{\nu+1}}\,e^{-2(p_\nu+\cdots+p_1)\Delta N}. \end{cases} \tag{10 a}$$

Ebenso bekommen wir:

$$\begin{aligned} H_{\nu+1} = N^{1/5}\mathfrak{e}'_\nu + (E_1+H_1)\mathfrak{f}'_\nu + (E_1-H_1)\mathfrak{g}'_\nu + H_\nu c'_{\nu,\nu} \\ + H_{\nu-1}c'_{\nu,\nu-1} + \cdots + H_1 c'_{\nu,1}, \end{aligned} \tag{10′}$$

wobei:

$$(10'\,a)\quad \begin{cases} c'_{\nu,\mu} = -\dfrac{A_\mu}{2A_{\nu+1}}\dfrac{Dp_\mu}{p_\mu}\left(1+e^{-2(p_\nu+\cdots+p_\mu)\Delta N}\right) \\ \mathfrak{e}'_\nu = -\dfrac{A_\nu}{2A_{\nu+1}}e^{-2p_\nu\Delta N}\dfrac{Dp_\nu}{p_\nu} - \dfrac{A_{\nu-1}}{2A_{\nu+1}}e^{-2(p_\nu+p_{\nu-1})\Delta N}\dfrac{Dp_{\nu-1}}{p_{\nu-1}} - \cdots \\ \qquad\qquad - \dfrac{A_1}{2A_{\nu+1}}e^{-2(p_\nu+\cdots+p_1)\Delta N}\dfrac{Dp_1}{p_1} \\ \mathfrak{f}'_\nu = \dfrac{A_1}{2A_{\nu+1}};\quad \mathfrak{g}'_\nu = -\dfrac{A_1}{2A_{\nu+1}}e^{-2(p_\nu+\cdots+p_1)\Delta N}. \end{cases}$$

§ 7.

Bis auf E_1, H_1 beseitigen wir nun durch Rekursion alle Größen E, H aus unseren Formeln. Die Rechnung ergibt:

$$E_k = N^{1/5}\{\mathfrak{e}_{k-1}+h_{k-1}\mathfrak{e}_{k-2}+\cdots+h_{k-i}\mathfrak{e}_{k-i-1}\}+(E_1+H_1)\{\mathfrak{f}_{k-1}+\cdots+h_{k-i}\mathfrak{f}_{k-i-1}\}$$
$$+(E_1-H_1)\{\mathfrak{g}_{k-1}+\cdots+h_{k-i}\mathfrak{g}_{k-i-1}\}+E_{k-i-1}\mathfrak{c}_{k-i-1,\,k-i-1}+\cdots+E_1\mathfrak{c}_{k-i-1,1},$$

wobei:

$$\mathfrak{c}_{k-1,\mu}=c_{k-1,\mu};\quad \mathfrak{c}_{k-i-1,\mu}=c_{k-i,\mu}+c_{k-i,\,k-i}\,\mathfrak{c}_{k-i-1,\mu};\quad h_{k-i}=\mathfrak{c}_{k-i,\,k-i}.$$

Und folglich:

$$(11)\quad E_k = N^{1/5}\{\mathfrak{e}_{k-1}+h_{k-1}\mathfrak{e}_{k-2}+\cdots+h_2\mathfrak{e}_1\}+(E_1+H_1)\{\mathfrak{f}_{k-1}+\cdots+h_2\mathfrak{f}_1\}$$
$$+(E_1-H_1)\{\mathfrak{g}_{k-1}+\cdots+h_2\mathfrak{g}_1\}+E_1h_1;$$

hierbei ist:

$$(11\,a)\quad \begin{cases} h_{k-1} = c_{k-1,\,k-1} \\ h_{k-2} = c_{k-1,\,k-2}+h_{k-1}c_{k-2,\,k-2} \\ h_{k-3} = c_{k-1,\,k-3}+h_{k-1}c_{k-2,\,k-3}+h_{k-2}c_{k-3,\,k-3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_1 = c_{k-1,1}+h_{k-1}c_{k-2,1}+h_{k-2}c_{k-3,1}+\cdots+h_2c_{1,1}. \end{cases}$$

Dies dreieckige lineare Schema liefert uns die Zahlen h als Funktionen der bekannten Größen c. Wir werden nun unsere Glieder nach der Ordnung, die sie in bezug auf Dp haben, in Teilverbände ordnen. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{e}_\nu=\mathfrak{e}_{1,\nu};\quad \mathfrak{e}_{2,\nu}=\sum_2^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{e}_{1,\sigma-1};\quad \cdots;\quad \mathfrak{e}_{i,\nu}=\sum_i^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{e}_{i-1,\sigma-1}$$

$$(12)\quad \mathfrak{f}_\nu=\mathfrak{f}_{1,\nu};\quad \mathfrak{f}_{2,\nu}=\sum_2^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{f}_{1,\sigma-1};\quad \cdots;\quad \mathfrak{f}_{i,\nu}=\sum_i^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{f}_{i-1,\sigma-1}$$

$$\mathfrak{g}_\nu=\mathfrak{g}_{1,\nu};\quad \mathfrak{g}_{2,\nu}=\sum_2^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{g}_{1,\sigma-1};\quad \cdots;\quad \mathfrak{g}_{i,\nu}=\sum_i^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{g}_{i-1,\sigma-1}.$$

Aus dem Aufbau des h-Schemas ergeben sich dann die Beziehungen:

$$\mathfrak{e}_{k-1}+h_{k-1}\mathfrak{e}_{k-2}+\cdots+h_2\mathfrak{e}_1=\mathfrak{e}_{1,k-1}+\mathfrak{e}_{2,k-1}+\cdots+\mathfrak{e}_{k-1,k-1}$$
$$\mathfrak{f}_{k-1}+h_{k-1}\mathfrak{f}_{k-2}+\cdots+h_2\mathfrak{f}_1=\mathfrak{f}_{1,k-1}+\mathfrak{f}_{2,k-1}+\cdots+\mathfrak{f}_{k-1,k-1}$$
$$\mathfrak{g}_{k-1}+h_{k-1}\mathfrak{g}_{k-2}+\cdots+h_2\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_{1,k-1}+\mathfrak{g}_{2,k-1}+\cdots+\mathfrak{g}_{k-1,k-1}.$$

Setzen wir endlich:

$$\mathfrak{r}_{1,\nu}=c_{\nu,1};\quad \mathfrak{r}_{2,\nu}=\sum_2^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{r}_{1,\sigma-1};\quad \cdots;\quad \mathfrak{r}_{i,\nu}=\sum_i^\nu{}^{\sigma} c_{\nu,\sigma}\,\mathfrak{r}_{i-1,\sigma-1}.$$

Da h_1 dieselbe Struktur besitzt wie die Reihe $\mathfrak{e}_{k-1} + h_{k-1}\mathfrak{e}_{k-2} + \cdots + h_2\mathfrak{e}_1$, bis auf Ersetzung von $\mathfrak{e}_\nu$ durch $c_{\nu,1}$, so ergibt sich: $h_1 = \mathfrak{r}_{1,k-1} + \mathfrak{r}_{2,k-1} + \cdots + \mathfrak{r}_{k-1,k-1}$; folglich:

$$(13)\quad \begin{cases} E_k = N^{1/5}\{\mathfrak{e}_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{e}_{k-1,k-1}\} + (E_1 + H_1)\{\mathfrak{f}_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{f}_{k-1,k-1}\} \\ \quad + (E_1 - H_1)\{\mathfrak{g}_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{g}_{k-1,k-1}\} + E_1\{\mathfrak{r}_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{r}_{k-1,k-1}\} \\ \text{und analog:} \\ H_k = N^{1/5}\{\mathfrak{e}'_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{e}'_{k-1,k-1}\} + (E_1 + H_1)\{\mathfrak{f}'_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{f}'_{k-1,k-1}\} \\ \quad + (E_1 - H_1)\{\mathfrak{g}'_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{g}'_{k-1,k-1}\} + H_1\{\mathfrak{r}'_{1,k-1} + \cdots + \mathfrak{r}'_{k-1,k-1}\}, \end{cases}$$

wobei überall die ungestrichenen Größen durch die gestrichenen zu ersetzen sind.

§ 8.

Wir sind nun in der Lage, einen Grenzübergang $k \to \infty$ bei festem θ, a und N zu vollführen.

$$\lim_{k\to\infty} \sum_0^{k-1\nu} p_\nu \Delta = \int_\vartheta^a \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-\theta^2} + \lg\frac{\theta}{a}\,\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-\theta^2}},$$

also nach (8):

$$(14)\quad \lim_{k\to\infty}\alpha_k = \lim_{k\to\infty}\bar{\alpha}_k = \alpha_\vartheta = \sqrt{1-a^2} + \lg\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} + (1-\sqrt{1-\theta^2}) + \lg\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_1^{k-1\nu}\lg\frac{1}{2}\Big(1+\frac{p_{\nu-1}}{p_\nu}\Big) = \lim_{k\to\infty}\sum_1^{k-1\nu}\lg\Big(1-\frac{D\,p_\nu}{2p_\nu}\Big) = \lg\Big(\sqrt{\frac{a}{\theta}}\,\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big)$$

$$\lim_{k\to\infty}\prod_1^{k-1\nu}\frac{1}{2}\Big(1+\frac{p_{\nu-1}}{p_\nu}\Big) = \sqrt{\frac{a}{\theta}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}},$$

ebenso:

$$\lim_{k\to\infty}\prod_1^{k-1\nu}\frac{1}{2}\Big(1+\frac{p_\nu}{p_{\nu-1}}\Big) = \sqrt{\frac{\theta}{a}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}},$$

und folglich, nach (8) und (8 a):

$$(14)\quad \begin{aligned} A_\vartheta &= \lim_{k\to\infty}A_k = \lim_{k\to\infty}\bar{A}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{a^{1/3}}{(1-a^2)^{1/4}}\,\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2\,(1-\theta^2)^{1/4}} \\ B_\vartheta &= \lim_{k\to\infty}B_k = \lim_{k\to\infty}\bar{B}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(1-a^2)^{1/2}}{a^{1/3}}\,\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2\,(1-\theta^2)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Auch die Restgrößen E_k und H_k streben bei zunehmendem k Grenzwerten zu, wie wir zeigen wollen. Zunächst ist:

$$(14\text{ a})\quad \begin{aligned} \lim_{k\to\infty}E_1 &= \frac{2\sqrt{1-\theta^2}}{1+\sqrt{1-\theta^2}}\,\varepsilon_1 + N^{1/5}\,\frac{\sqrt{1-\theta^2}-1}{\sqrt{1-\theta^2}+1} \\ \lim_{k\to\infty}H_1 &= \frac{2\varepsilon_2}{1+\sqrt{1-\theta^2}} - N^{1/5}\,\frac{\sqrt{1-\theta^2}-1}{\sqrt{1-\theta^2}+1}; \end{aligned}$$

denselben Grenzwert haben auch $\bar{E}_1$ und $\bar{H}_1$ für $k \to \infty$.

Da nun ε_1 und ε_2 beschränkt waren in N, falls $\theta = N^{-\tau}$, $\tau > \frac{3}{5}$, gilt dasselbe von den Ausdrücken, gegen die $E_1 + H_1$, $E_1 - H_1$, E_1, H_1 für $k \to \infty$ streben; ebenso von den überstrichenen Größen, die ja denselben Grenzwert haben. Es bleiben nun zu betrachten die Reihen:

$$\sum_1^{k-1\nu} \mathfrak{e}_{\nu,k-1}\,;\quad \sum_1^{k-1\nu} \mathfrak{f}_{\nu,k-1}\,;\quad \sum_1^{k-1\nu} \mathfrak{g}_{\nu,k-1}\,;\quad \sum_1^{k-1\nu} \mathfrak{r}_{\nu,k-1},$$

sowie die entsprechenden gestrichenen und überstrichenen Größen. Die einzelne Reihenglieder streben für $k \to \infty$ gegen vielfache Integrale. Zum Beispiel die Reihe der $\mathfrak{f}$:

$$c_{\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\frac{d_\nu^{1/2}}{(1-d_\nu^2)^{1/4}}\frac{-\Delta}{d_\sigma^{3/2}(1-d_\sigma^2)^{3/4}}\Big(1+e^{-2N\int_{d_\sigma}^{d_\nu} p(\xi)d\xi}\Big)\Big(1+\frac{r}{k}\Big)$$

$$\mathfrak{f}_{1,\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\bar{d}_\nu}{\theta}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-d_\nu^2}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(1+\frac{\bar{r}}{k}\Big).$$

Die Rechnung zeigt, daß r und $\bar{r}$ beschränkt sind in k bei festem a, θ, N, und zwar gleichmäßig in bezug auf die Indizes ν und σ. Folglich ist:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{f}_{1,k-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\theta}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{f}_{2,k-1} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{\theta}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}}\int_\theta^a \frac{1+e^{-2N\int_{x_1}^{a} p d\xi}}{x_1(1-x_1^2)}\,dx_1$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{f}_{3,k-1} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{a}{\theta}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}}\int_\theta^a \frac{1+e^{-2N\int_{x_1}^{a} p d\xi}}{x_1(1-x_1^2)}\,dx_1\int_\theta^{x_1}\frac{1+e^{-2N\int_{\theta}^{x_1} p d\xi}}{x_2(1-x_2^2)}\,dx_2 \quad \text{usw.}$$

Es sei $K(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\frac{1+e^{-2N\int_{x_2}^{x_1} p d\xi}}{x_2(1-x_2^2)}$. Dann haben die Glieder der $\mathfrak{f}$-Reihe als Grenzwerte die entsprechenden Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\theta}}\Big(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big\{1+\int_\theta^a K(a,x_1)\,dx_1+\int_\theta^a K(a,x_1)\,dx_1\int_\theta^{x_1} K(x_1,x_2)\,dx_2+\cdots\Big\}.$$

§ 9.

Diese Reihe konvergiert; denn sei M das Maximum von $|K|$ im Intervall $\theta \leqq x_1, x_2 \leqq a$, so werden die absoluten Beträge der einzelnen Glieder majorisiert durch $\frac{M^\nu(a-\theta)^\nu}{\nu!}$.

Der Summenwert dieser Integralreihe stellt auch den Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\sum_1^{k-1\nu}\mathfrak{f}_{\nu,k-1}$ dar. Um das zu beweisen genügt es zu zeigen, daß die Differenz zwischen der k-ten Partialsumme der Integralreihe und $\sum_1^{k-1\nu}\mathfrak{f}_{\nu,k-1}$ absolut genommen für $k\to\infty$ verschwindet; denn der k-te Rest der Integralreihe verschwindet ja infolge der Konvergenz. Dieser Beweis läßt sich erbringen, wenn wir bemerken, daß das Integral über jede einzelne der Funktionen

$$K,\ K\int K,\ K\int K\int K,\ \ldots,$$

von θ bis x erstreckt, sich von der zur Stufenlänge Δ gehörigen Annäherungssumme desselben jeweils um einen Faktor $1+\frac{\varepsilon}{k}$ unterscheidet, wobei die ε absolut genommen alle eine gemeinsame Schranke $\tilde{\varepsilon}$ besitzen, in die weder k noch x eingehn.

Zunächst nehmen wir an, es werde stets vom Index 1 ab summiert [1]); es ist:

$$\mathfrak{f}_{2,\nu} = \sum_1^{\nu}{}_{\sigma}\, c_{\nu,\sigma}\, \mathfrak{f}_{1,\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_\nu}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-d_\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}} \sum_1^{\nu}{}_{\sigma}\, \Delta\left(1+\frac{r}{k}\right)\left(1+\frac{\bar r}{k}\right) K(d_\nu, d_\sigma)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_\nu}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-d_\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{r_2}{k}\right)\sum_1^{\nu}{}_{\sigma}\, \Delta\, K(d_\nu, d_\sigma);$$

hierbei sind r und $\bar r$ von ν und σ abhängig; es gilt aber für alle ν und σ: $|r|, |\bar r| \leqq R$; R hängt von k nicht ab. Ferner ist

$$\frac{r_2}{k} = \frac{1}{k\,\Sigma\Delta\, K}\left\{\Sigma r \Delta K + \Sigma \bar r \Delta K + \frac{1}{k}\,\Sigma r \bar r \Delta K\right\};\quad \left|\frac{r_2}{k}\right| \leqq \frac{R}{k}\,\frac{\Sigma|K|\Delta}{|\Sigma K \Delta|}\left(2+\frac{R}{k}\right),$$

und wegen der Definitheit von K im Intervall θ bis a: $\left|\frac{r_2}{k}\right| \leqq \left(1+\frac{R}{k}\right)^2 - 1$;

$$\sum_1^{\nu}{}_{\sigma}\, K(d_\nu, d_\sigma)\,\Delta = \int_\vartheta^{d\nu} K(d_\nu, x)\,dx \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right), \qquad \text{also}$$

$$\mathfrak{f}_{2,\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_\nu}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-d_\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_\vartheta^{d\nu} K(d_\nu, x)\,dx \cdot \left(1+\frac{r_3}{k}\right),$$

wobei:

$$\frac{r_3}{k} = \left(1+\frac{r_2}{k}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right) - 1 \quad ;\quad \left|\frac{r_3}{k}\right| \leqq \left(1+\frac{R}{k}\right)^2\left(1+\frac{\tilde\varepsilon}{k}\right) - 1,$$

falls $\tilde\varepsilon$ die oben erwähnte gemeinsame Schranke der $|\varepsilon|$ ist.

So wird weiter gerechnet; es sei $P \geqq R, \tilde\varepsilon$, so bekommen wir für die Differenz zwischen $\sum_1^{k-1}{}_{\nu}\, \mathfrak{f}_{\nu,\,k-1}$ und der k-ten Partialsumme der Integralreihe folgende Majorisierung:

$$\text{const.}\left\{\frac{P}{k} + \frac{M(a-\theta)}{1!}\left(\left(1+\frac{P}{k}\right)^3 - 1\right) + \frac{M^2(a-\theta)^2}{2!}\left(\left(1+\frac{P}{k}\right)^5 - 1\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{M^k(a-\theta)^k}{k!}\left(\left(1+\frac{P}{k}\right)^{2k+1} - 1\right)\right\}.$$

Letzterer Ausdruck verschwindet aber mit wachsendem k, wie durch Umordnung der Glieder ersichtlich.

Nun ist noch zu berücksichtigen, daß die Summationsindizes nicht von 1 ab liefen, sondern für $\mathfrak{f}_{i,\nu}$ nur von i ab. Man sieht aber, daß die so vernachlässigten Glieder durch Randstreifen der entsprechende Integrale majorisiert werden, die für $k \to \infty$ verschwinden.

§ 10.

Entsprechendes läßt sich nachweisen für die Klammerausdrücke in $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{f}'$. Sie alle haben als Grenzwert für $k \to \infty$ eine Reihe nach iterierten Integralen. Die Klammerausdrücke in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ verschwinden beim Grenzübergang. Auch die untere Approximationsfunktion läßt sich auf analoge Art behandeln. Wir hatten schon gesehen, daß

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \bar A_k = A_\theta;\quad \lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} \bar B_k = B_\theta;\quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \bar\alpha_k = \alpha_\theta.$$

---

[1]) Ebenso haben wir der Kürze halber den Index $\sigma - 1$ durch σ ersetzt in der Formel $\mathfrak{f}_{2,\,\nu} = \sum_2^{\nu}{}_{\sigma}\, c_{\nu,\sigma}\, \mathfrak{f}_{1,\,\sigma-1}$; das ändert das Ergebnis nicht. Die alte Bezeichnung haben wir aber beibehalten.

Außerdem wird noch:

$$\lim_{k\to\infty} E_k = \lim_{k\to\infty} \bar{E}_k = E_\vartheta; \quad \lim_{k\to\infty} H_k = \lim_{k\to\infty} \bar{H}_k = H_\vartheta.$$

Dies wird evident, wenn man bedenkt, daß E_1 und $\bar{E}_1$ einerseits, H_1 und $\bar{H}_1$ andererseits gegen dieselbe Grenze streben, und daß sich ferner die Rekursionsformeln für H_ν und E_ν von denen für $\bar{H}_\nu$ und $\bar{E}_\nu$ nur durch Ersetzung von p_ν durch $p_{\nu+1}$ unterscheiden. Folglich ist, unter Benutzung der Ungleichungen (4):

$$(15)\qquad \begin{aligned} w_n(aN) &= A_\vartheta e^{\alpha_\vartheta N}\left(1+\frac{E_\vartheta}{N^{1/5}}\right)\\ w_n'(aN) &= B_\vartheta e^{\alpha_\vartheta N}\left(1+\frac{H_\vartheta}{N^{1/5}}\right). \end{aligned}$$

A_ϑ, B_ϑ, α_ϑ sind hierbei durch die Formeln (14) gegeben. Von den Klammerausdrücken in (13) haben wir nur den einfachsten, $\sum_1^{k-1} \mathfrak{f}_{\nu,k-1}$, vollkommen ausgerechnet. Man bekommt die Grenzwerte der übrigen, wenn man beachtet, daß die Formeln (10 a) und (10′ a) für c, $\mathfrak{e}$, ... in der Grenze ergeben:

$$c_{\nu,\sigma} = -\frac{1}{2}\frac{d_\nu^{1/2}}{(1-d_\nu^2)^{1/4}}\frac{1+e^{-2N\int_{d_\sigma}^{d_\nu} p\,d\xi}}{d_\sigma^{3/2}(1-d_\sigma^2)^{3/4}}\Delta; \qquad c'_{\nu,\sigma} = +\frac{1}{2}\frac{(1-d_\nu^2)^{1/4}}{d_\nu^{1/2}}\frac{1+e^{-2N\int_{d_\sigma}^{d_\nu} p\,d\xi}}{d_\sigma^{1/2}(1-d_\sigma^2)^{5/4}}$$

$$\mathfrak{f}_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_\nu}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-d_\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}}; \qquad \mathfrak{f}'_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta}{d_\nu}}\left(\frac{1-d_\nu^2}{1-\theta^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\mathfrak{e}_\nu = -\frac{1}{2}\frac{d_\nu^{1/2}}{(1-d_\nu^2)^{1/4}}\int_\vartheta^{d_\nu}\frac{e^{-2N\int_x^{d_\nu} p\,d\xi}}{x^{3/2}(1-x^2)^{3/4}}dx; \quad \mathfrak{e}'_\nu = +\frac{1}{2}\frac{(1-d_\nu^2)^{1/4}}{d_\nu^{1/2}}\int_\vartheta^{d_\nu}\frac{e^{-2N\int_x^{d_\nu} p\,d\xi}}{x^{1/2}(1-x^2)^{5/4}}dx$$

$$\mathfrak{g}_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_\nu}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-d_\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-2N\int_\vartheta^{d_\nu} p\,d\xi}\,dx; \qquad \mathfrak{g}'_\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta}{d_\nu}}\left(\frac{1-d_\nu^2}{1-\theta^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-2N\int_\vartheta^{d_\nu} p\,d\xi}.$$

Für die Restglieder E_ϑ und H_ϑ ergeben sich dann die Formeln [2]):

$$(16)\qquad \begin{aligned} E_\vartheta &= \frac{1}{2}\frac{a^{1/2}}{(1-a^2)^{1/4}}\Big\{-N^{1/5}\varphi_1(a) + \frac{2(\varepsilon_1\sqrt{1-\theta^2}+\varepsilon_2)}{1+\sqrt{1-\theta^2}}\frac{(1-\theta^2)^{1/4}}{\theta^{1/2}}\varphi_2(a)\\ &\qquad + \frac{2(\varepsilon_1\sqrt{1-\theta^2}-\varepsilon_2)+2N^{1/5}(\sqrt{1-\theta^2}-1)}{1+\sqrt{1-\theta^2}}\frac{(1-\theta^2)^{1/4}}{\theta^{1/2}}\varphi_3(a)\Big\}\\ H_\vartheta &= \frac{1}{2}\frac{(1-a^2)^{1/4}}{a^{1/2}}\Big\{N^{1/5}\bar{\varphi}_1(a) + \frac{2(\varepsilon_1\sqrt{1-\theta^2}+\varepsilon_2)}{1+\sqrt{1-\theta_2}}\frac{\theta^{1/2}}{(1-\theta^2)^{1/4}}\bar{\varphi}_2(a)\\ &\qquad - \frac{2(\varepsilon_1\sqrt{1-\theta^2}-\varepsilon_2)+2N^{1/5}(\sqrt{1-\theta^2}-1)}{1+\sqrt{1-\theta^2}}\frac{\theta^{1/2}}{(1-\theta^2)^{1/4}}\bar{\varphi}_3(a)\Big\}; \end{aligned}$$

hierbei ist

$$(16\,a)\qquad \begin{cases} \varphi_{1,2,3}(a) = f_{1,2,3}(a) + \int_\vartheta^a K(a,x)\,f_{1,2,3}(x)\,dx + \int_\vartheta^a K(a,x_1)\int_\vartheta^{x_1} K(x_1,x_2)\,f_{1,2,3}(x_2)\,dx_2\,dx_1 + \cdots\\ \bar{\varphi}_{1,2,3}(a) = \bar{f}_{1,2,3}(a) + \int_\vartheta^a \bar{K}(a,x)\,\bar{f}_{1,2,3}(x)\,dx + \int_\vartheta^a \bar{K}(a,x_2)\int_\vartheta^{x_1} \bar{K}(x_1,x_2)\,\bar{f}_{1,2,3}(x_2)\,dx_2\,dx_1 + \cdots \end{cases}$$

[2]) Von hier ab werden die zu H gehörigen Größen überstrichen anstatt wie bisher mit einem Strich versehen.

$$K(s,t) = -\frac{1}{2}\frac{1+e^{-2N\int_t^s p(\xi)d\xi}}{t(1-t^2)}; \quad \bar{K}(s,t) = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-2N\int_t^s p(\xi)d\xi}}{t(1-t^2)}$$

$$f_2(s) = \bar{f}_2(s) = 1; \; f_3(s) = \bar{f}_3(s) = e^{-2N\int_0^s p d\xi}$$

$$f_1(s) = \int_0^s \frac{e^{-2N\int_x^s p d\xi}}{x^{3/2}(1-x^2)^{3/4}}\,dx; \quad \bar{f}_1(s) = \int_0^s \frac{e^{-2N\int_x^s p d\xi}}{x^{1/2}(1-x^2)^{5/4}}\,dx\,.$$

Die Funktionen φ lösen die Volterraschen Integralgleichungen:

(16 b)
$$\varphi_{1,2,3}(s) = f_{1,2,3}(s) + \int_0^s K(s,t)\,\varphi_{1,2,3}(t)\,dt$$
$$\bar{\varphi}_{1,2,3}(s) = \bar{f}_{1,2,3}(s) + \int_0^s \bar{K}(s,t)\,\bar{\varphi}_{1,2,3}(t)\,dt\,.$$

(Die Entwicklung der Lösungen dieser Gleichungen in Neumannsche Reihen ergibt unsere Reihen (16 a) für φ und $\bar{\varphi}$).

§ 11.

Die Treppenwege haben nun ihren Zweck erfüllt, der Parameter k ist eliminiert. Aus unseren Formeln müssen wir nunmehr die erstrebte asymptotische Darstellung erhalten durch Koppelung von θ mit N. Das Restglied des Ausdrucks wird im Vergleich zum Hauptglied klein sein von der Ordnung $N^{-1/5}$. Kleiner können wir es nicht machen. Dies liegt an der Abschätzung, die wir für die Gammafunktion verwendet haben, welche von Anfang an in unsere Rechnung einging. $N^{-1/5}$ stellt also das Optimum der für uns erreichbaren Restgliedabschätzung dar.

Wir setzen $\theta = N^{-\tau}$, $\tau > 0$. Bei dieser Koppelung sind die Größen:

$$\zeta_1 = \frac{2(\varepsilon_1\sqrt{1-\theta^2}+\varepsilon_2)}{1+\sqrt{1-\theta^2}}; \qquad \zeta_2 = 2\,\frac{\varepsilon_1\sqrt{1-\theta^2}-\varepsilon_2+N^{1/5}(\sqrt{1-\theta^2}-1)}{1+\sqrt{1-\theta^2}}$$

beschränkte Funktionen von N, von einem bestimmten N ab, falls $\tau > \frac{3}{5}$ (siehe § 3). Ferner ist $\dfrac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2(1-\theta^2)^{1/4}} = (1+\theta^2 r)$, wo r eine beschränkte Funktion von N sein soll, und a fortiori $\dfrac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2(1-\theta^2)^{1/4}} = 1 + N^{-1/5} r'$, wobei von r' dasselbe wie von r gilt. Folglich ist:

$$A_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{a^{1/2}}{(1-a^2)^{1/4}}\,(1+N^{-1/5}r_1); \quad B_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(1-a^2)^{1/4}}{a^{1/2}}\,(1+N^{-1/5}r_2)\,,$$

wo r_1, r_2 in N beschränkt sind. Ebenso (siehe (14)):

$$1-\sqrt{1-\theta^2}+\lg\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2} = N^{-2\tau}\,r$$
$$N\left\{1-\sqrt{1-\theta^2}+\lg\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}\right\} = N^{1-2\tau}\,r,$$

und es wird

$$e^{\alpha_\theta N} = e^{\left(\sqrt{1-a^2}+\lg\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)N}\,(1+N^{-1/5}r_3),$$

falls wir verlangen $N^{1-2\tau} < N^{-1/5}$. Wir haben wiederum für τ die Bedingung:

$$\tau > \tfrac{3}{5}.$$

Es sei noch bemerkt, daß in r_1, r_2, r_3 die Zahl a nicht eingeht.

Nun müssen wir zeigen, daß unter dieser Koppelungsbedingung eine Zahl τ derart gewählt werden kann, daß E_θ und H_θ beschränkte Funktionen von N sind. Wir brauchen also Abschätzungen für die Größen φ und $\overline{\varphi}$; dabei gehen wir von den Integralgleichungen (16 b) aus, denen sie genügen.

§ 12.

Der Kern der betrachteten Integralgleichungen setzt sich additiv zusammen aus zwei sehr ungleichen Bestandteilen. Der erste, $\mp \dfrac{1}{t(1-t^2)}$, besitzt in jedem Punkte des dreieckigen Integrationsbereiches einen von N unabhängigen Wert; der zweite, $\pm \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{-2N\int_t^s p(\xi)d\xi}}{t(1-t^2)}$, verschwindet mit wachsendem N exponentiell in jedem Punkte des Integrationsbereiches, ausgenommen am Rande $t = s$. Diesem Aufbau des Kernes entsprechend wird die Lösung sich aus zwei Teilen zusammensetzen, die der Größenordnung in N nach voneinander stark abweichen.

Eine formale Rechnung liefert uns die gewünschte Zerlegung: Genügt $\varphi(s)$ der Integralgleichung $\varphi(s) = f(s) + \int_\theta^s K(s,t)\, f(t)\, dt$ und ist $K(s,t) = k(s,t) + \varkappa(s,t)$, so wird

$$\varphi(s) = \psi(s) + \chi(s);$$

$$(17)\quad \begin{cases} \psi(s) = f(s) + \int_\theta^s l(s,t)\, f(t)\, dt; \;\; \chi(s) = \int_\theta^s \{\pi(s,t) + \int_t^s l(s,r)\, \pi(r,t)\, dr\}\, f(t)\, dt, \\ \text{wobei} \quad l(s,t) = k(s,t) + \int_t^s k(s,r)\, k(r,t)\, dr + \cdots, \\ \varkappa^*(s,t) = \varkappa(s,t) + \int_t^s \varkappa(s,r)\, l(r,t)\, dr; \;\; \pi(s,t) = \varkappa^*(s,t) + \int_t^s \varkappa^*(s,r)\, \varkappa^*(r,t)\, dr + \cdots \end{cases}$$

Wir wenden diese Zerlegungsformel an, indem wir spalten:

$$k(s,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t(1-t^2)}; \qquad \varkappa(s,t) = \frac{1}{2}\frac{e^{-2N\int_t^s p d\xi}}{t(1-t^2)}; \quad \text{(ebenso } \bar{k} = -k, \bar{\varkappa} = -\varkappa\text{).}$$

ψ, der Hauptteil von φ, genügt also der Gleichung:

$$(17\text{ a}) \qquad \psi(s) = f(s) + \int_\theta^s k(s,t)\, \psi(t)\, dt.$$

§ 13.

Indem wir nun φ durch $\psi + \chi$ ersetzen, zerlegen wir auch E_θ und H_θ in zwei Summanden. Wir behandeln zuerst den ψ enthaltenden Teil und zeigen, daß er in N beschränkt ist, wie groß wir auch τ wählen.

Der Kern der Integralgleichung (17 a), der ψ genügt, enthält nur eine Variable; die Gleichung kann übergeführt werden in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, aus der wir ψ_2, ψ_3 berechnen:

$$\psi_2(a) = \sqrt{\frac{\theta}{a}}\left(\frac{1-a^2}{1-\theta^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\psi_3(a) = \sqrt{\frac{\theta}{a}}\left(\frac{1-a^2}{1-\theta^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{1 - 2N\,\frac{(1-\theta^2)^{1/4}}{\theta^{1/2}}\int_\theta^a \frac{(1-s^2)^{1/4}}{s^{1/2}}\, e^{-2N\int_\theta^s p\,d\xi}\, ds\right\}.$$

Wir majorisieren $|\psi_3|$, indem wir die Ungleichheit benutzen: $p(\xi) > \frac{\sqrt{1-a^2}}{\xi}$ für $\theta \leqq \xi \leqq a < 1$, woraus sich ergibt:

$$e^{-2N\int_t^s p\,d\xi} < \left(\frac{t}{s}\right)^{2N\sqrt{1-a^2}} \text{ und } \int_\theta^a \frac{(1-s^2)^{1/4}}{s^{1/2}}\, e^{-2N\int_\theta^s p\,d\xi}\, ds < \frac{\theta^{1/2}}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}};$$

für $N > \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ also:

$$|\psi_3(a)| < \left(\frac{1-a^2}{1-\theta^2}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\theta}{a}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2N}}\right).$$

Um $|\psi_1|$ abzuschätzen gehen wir aus von der Formel $\psi_1(s) = f_1(s) + \int_\theta^s l(s,t)\, f_1(t)\, dt$.

Die Rechnung ergibt:

$$l(s,t) = k + k^{(2)} + \cdots = -\frac{1}{2}\frac{1}{t(1-t^2)}\sqrt{\frac{t}{s}}\left(\frac{1-s^2}{1-t^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ferner ist:

$$f_1(s) = \int_\theta^s \frac{e^{-2N\int_x^s p\,d\xi}}{x^{3/2}(1-x^2)^{3/4}}\, dx < \frac{s^{-1/2}}{(1-s^2)^{3/4}}\,\frac{1}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}},$$

und hieraus gewinnen wir:

$$|\psi_1(a)| < \frac{1}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\,\frac{(1-a^2)^{1/4}}{a^{1/2}}\left\{\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-a^2)^2}\,\lg\frac{1}{\theta}\right\}.$$

Auf analoge Art ergibt sich für die überstrichenen Größen:

$$\bar{\psi}_2(a) = \sqrt{\frac{a}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1}{4}}; \quad |\psi_3(a)| < \sqrt{\frac{a}{\theta}}\left(\frac{1-\theta^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{2N}}\right)$$

$$|\bar{\psi}_1(a)| < \frac{1}{2N\sqrt{1-a^2}+\frac{1}{2}}\,\frac{a^{1/2}}{(1-a^2)^{1/4}}\left\{\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-a^2)^2}\,\lg\frac{1}{\theta}\right\}.$$

Für den ψ-Summanden von E_θ und H_θ haben wir folglich die Abschätzung:

$$(18)\quad \frac{1}{2}\left\{\frac{N^{1/2}}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\tau\lg N}{(1-a^2)^2}\right) + \zeta_1 + \zeta_2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2N}}\right)\right\}$$

für $N > \frac{1}{4\sqrt{1-a^2}}$; wie wir auch τ wählen, bleiben diese Bestandteile mit wachsendem N beschränkt, sofern $a < \text{const.} < 1$.

§ 14.

Wir gehen nun zu den χ-Bestandteilen über. Es war:

$$\chi(a) = \int_\theta^a \Omega(a,t) f(t)\, dt, \quad \text{wobei} \quad \Omega(a,t) = \pi(a,t) + \int_t^a l(a,r)\pi(r,t)\, dr.$$

π ist die Resolvente, die zum Kern $\varkappa^*$ gehört; wir schätzen zunächst $|\varkappa^*|$ ab.

$$|\varkappa| = \frac{1}{2}\frac{1}{t(1-t^2)} e^{-2N\int_t^s p d\xi}; \quad |l| < \frac{1}{2}\frac{(1-s^2)^{1/4}}{s^{1/2}}\frac{1}{t^{1/2}(1-t^2)^{3/4}}.$$

Für die Exponentialfunktion verwenden wir wieder die Abschätzung

$e^{-2N\int_t^s p d\xi} < \left(\frac{t}{s}\right)^{2N\sqrt{1-a^2}}$; es wird dann:

$$|\varkappa^*| < \frac{1}{2(1-a^2)}\frac{1}{t^{1/2}s^{1/2}}\left\{\left(\frac{t}{s}\right)^{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-a^2)}\frac{1}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Die Größe $|\pi|$ soll durch eine Exponentialreihe abgeschätzt werden. Ist im ganzen Gebiete $\theta \leqq s, t \leqq a$ $|\varkappa^*|$ kleiner als eine Größe M, die von s und t nicht abhängt, so ist:

$$|\varkappa^{*(2)}| < M^2(s-t), \quad |\varkappa^{*(3)}| < M^3\frac{(s-t)^2}{2!}, \ldots,$$

also

$$|\pi| \leqq |\varkappa^*| + |\varkappa^{*(2)}| + \cdots \leqq M e^{(s-t)M} \leqq M e^M.$$

Nun wird aber $|\varkappa^*|$ auf der Geraden $s=t$ zu groß; im Punkte (θ, θ) haben wir nach obiger Abschätzung bloß $|\varkappa^*| < \frac{\text{const.}}{\theta}$. Bei der Koppelung $\theta = N^{-\tau}$ wächst also M mit N über alle Grenzen, folglich auch unsere Majorante für Ω, χ_2 und E_θ. Um dies zu vermeiden, ziehen wir nicht den Kern $\varkappa^*$, sondern seine erste Faltung $\varkappa^{*(2)}$ zur Resolventenbildung heran.

Sei jetzt: $$j(s,t) = \varkappa^{*(2)}(s,t) + \varkappa^{*(4)}(s,t) + \cdots,$$

so wird $$\pi(s,t) = \varkappa^*(s,t) + j(s,t) + \int_t^s \varkappa^*(s,r)\, j(r,t)\, dr.$$

$\varkappa^{*(2)}$ aber wird im Bereiche $\theta \leqq s, t \leqq a$ bei wachsendem N gleichmäßig klein:

$$|\varkappa^{*(2)}| \leqq \int_t^s |\varkappa^*(s,r)| \cdot |\varkappa^*(r,t)|\, dr < \frac{1}{4(1-a^2)^2}\frac{1}{t^{1/2}s^{1/2}}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{4(1-a^2)^2}\frac{1}{\left(2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}\right)^2}\lg\frac{s}{t} + \frac{1}{1-a^2}\frac{1}{\left(2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}\right)^2} + \left(\frac{t}{s}\right)^{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\lg\frac{s}{t}\right\};$$

nun ist:

$$0 < \left(\frac{t}{s}\right)^{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\lg\frac{s}{t} < \frac{1}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}};$$

also im Bereiche $\theta \leqq s, t \leqq a$:

$$\varkappa^{*(2)} < \frac{1}{4(1-a^2)^2}\frac{N^\tau}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{1-a^2}\frac{1+\frac{\tau \lg N}{4(1-a^2)}}{2N\sqrt{1-a^2}-\frac{1}{2}}\right) < m_1(a)\, N^{\tau-1}$$

für $N > N_1(a)$.

Die Zahlen m_1, N_1 sind dabei Funktionen von a, die eine gemeinsame feste obere Schranke haben, wenn a im Intervall $0 \leqq a \leqq \text{const.} < 1$ variiert. Die oben erwähnte Exponentialabschätzung gibt nun für j:

$$|j(s,t)| < 2 m_1 N^{\tau-1}.$$

Es wird ferner:

$$\int_t^s |\varkappa^*(s,r)| \cdot |j(r,t)|\, dr < m_2 N^{\tau-1} \qquad \text{für } N > N_2$$

$$|\pi(s,t)| < |\varkappa^*(s,t)| + m_3 N^{\tau-1} \qquad \text{für } N > N_3$$

$$\int_t^a |l(a,r)| \cdot |\pi(r,t)|\, dr \leqq \int_t^a |l(a,r)| \cdot |\varkappa^*(r,t)|\, dr + m_3 N^{\tau-1} \int_t^a |l(a,r)|\, dr$$

$$< \frac{\text{const.}}{a^{\frac{1}{2}}} \{N^{\frac{\tau}{2}-1}(1 + \text{const. lg } N) + a^{1/2} - t^{1/2}\} < \frac{\text{const.}}{a^{\frac{1}{2}}} N^{\tau-1},$$

also:

$$|\pi| + \int_t^a |l(a,r)| \cdot |\pi(r,t)|\, dr < |\varkappa^*(a,t)| + \frac{\text{const.}}{a^{\frac{1}{2}}} N^{\tau-1},$$

so daß wir für Ω die Abschätzung bekommen:

$$|\Omega(a,t)| < |\varkappa^*(a,t)| + \frac{m_4}{\sqrt{a}} N^{\tau-1} \qquad \text{für } N > N_4.$$

Hierbei gilt von m_4, N_4 das, was von $m_1, N_1, \ldots$ gesagt wurde, da alle in der Rechnung auftretenden Konstanten beschränkt bleiben, solange a sich in endlicher Entfernung von der Stelle 1 befindet.

§ 15.

Wir können nun die Größen χ abschätzen:

$$|\chi_2(a)|,\ |\chi_3(a)| \leqq \int_\vartheta^a |\Omega(a,t)|\, dt < \frac{m_5}{\sqrt{a}} N^{\tau-1}$$

$$|\chi_1(a)| < \int_\vartheta^a |\Omega(a,t)| \cdot |f_1(t)|\, dt < \text{const. } N^{\frac{\tau}{2}-1} \int_\vartheta^a |\Omega(a,t)|\, dt < \frac{m_6}{\sqrt{a}} N^{\frac{3\tau}{2}-2}.$$

Eine analoge Rechnung führt für die überstrichenen Größen zu den Vergleichungen:

$$|\chi_2(a)|,\ |\chi_3(a)| < a^{1/2} \overline{m}_5 N^{2\tau-1}; \qquad |\chi_1(a)| < a^{1/2} \overline{m}_6 N^{\frac{3\tau}{2}-2}.$$

Für den χ enthaltenden Bestandteil von E_ϑ und H_ϑ bekommen wir die Majorante des absoluten Betrags (siehe Formel (16)):

$$\text{(19)} \qquad \frac{1}{2} \frac{1}{(1-a^2)^{1/4}} \{m_6 N^{\frac{3\tau}{2}-\frac{9}{5}} + m_5 N^{\frac{3\tau}{2}-1} (|\zeta_1| + |\zeta_2|)\}$$

$$\text{bzw. } \frac{1}{2} (1-a^2)^{1/4} \{\overline{m}_6 N^{\frac{3\tau}{2}-\frac{9}{5}} + 2\overline{m}_5 N^{\frac{3\tau}{2}-1} (|\zeta_1| + |\zeta_2|)\}.$$

Sei nun $\tau > \frac{3}{5}$; dann sind $|\zeta_1|$ und $|\zeta_2|$ in N beschränkt; wir erhalten für den absoluten Betrag der χ-Bestandteile von $|E_\vartheta|$ und $|H_\vartheta|$ die gemeinsame Majorante:

$$\text{(19 a)} \qquad m(a) N^{\frac{3\tau}{2}-1} \qquad \text{für } N > N_a.$$

Hierbei ist $m(a)$ und auch N_a eine im Intervall $0 \leqq a \leqq \text{const.} < 1$ beschränkte Funktion von a. Die χ-Bestandteile verschwinden also mit wachsendem N, falls

$\frac{3\tau}{2} - 1 > 0$. Diese Bedingung ist mit der ersten verträglich; wir müssen τ so wählen, daß

$$\tfrac{9}{15} < \tau < \tfrac{10}{15}.$$

Hieraus, und aus den Ergebnissen von § 13 (Formel (18)) können wir nun folgern, daß bei einer solchen Koppelung von θ mit N die Größen $|E_\theta|$ und $|H_\theta|$ bei wachsendem N beschränkt bleiben (aber nicht, daß sie verschwinden, denn die ψ-Bestandteile verschwinden nicht); diese Schranke verhält sich in bezug auf a wie $m(a)$.

Diese Koppelung $\theta = N^{-\tau}$, $\frac{9}{15} < \tau < \frac{10}{15}$ liefert uns dann die gesuchten Formeln:

$$(20)\quad \begin{cases} w_n(aN) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{a^{1/2}}{(1-a^2)^{1/4}} e^{\left(\sqrt{1-a^2} + \lg \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right) N} \left(1 + \dfrac{E}{N^{1/5}}\right) \\ w_n'(aN) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{(1-a^2)^{1/4}}{a^{1/2}} e^{\left(\sqrt{1-a^2} + \lg \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right) N} \left(1 + \dfrac{H}{N^{1/5}}\right) \end{cases}$$

für $N > N_a$. Die Funktionen $|E|, |H|$ bleiben bei unbeschränkt wachsendem N unterhalb einer Schranke; diese Schranke besitzt selber wieder eine Schranke, wenn a im Intervall $0 \leqq a \leqq \text{const.} < 1$ variiert; desgleichen die Zahl N_a.

Nun wollen wir noch N durch n ersetzen; in den bisherigen Überlegungen ist, wie mehrfach betont, die Konstanz von a nirgends benutzt worden, wir machten lediglich von der Voraussetzung Gebrauch, daß $\theta \leqq a \leqq \text{const.} < 1$ sein soll. Setzen wir nun:

$$a = \tilde{a}\left(1 + \frac{1}{4N^2}\right)^{1/2}.$$

wobei $\tilde{a}$ eine Konstante sein soll und kleiner als 1. Die Rechnung ergibt:

$$(21)\quad \begin{cases} w_n(an) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\tilde{a}^{1/2}}{(1-\tilde{a}^2)^{1/4}} e^{\left(\sqrt{1-\tilde{a}^2} + \lg \frac{1-\sqrt{1-\tilde{a}^2}}{\tilde{a}}\right) n} \left(1 + \dfrac{\tilde{E}}{n^{1/5}}\right) \\ w_n'(an) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{(1-\tilde{a}^2)^{1/4}}{\tilde{a}^{1/2}} e^{\left(\sqrt{1-\tilde{a}^2} + \lg \frac{1-\sqrt{1-\tilde{a}^2}}{a}\right) n} \left(1 + \dfrac{\tilde{H}}{n^{1/5}}\right). \end{cases}$$

$|\tilde{E}|, |\tilde{H}|$ sind beschränkte Funktionen von n für $n > \text{const.}$

Bedenken wir, daß $w_n(x) = \sqrt{x}\, I_n(x)$, und führen wir statt $\tilde{a}$ eine Zahl α ein durch die Substitution $\frac{1}{\tilde{a}} = \cos \text{hyp}\, \alpha$, so erhalten wir die übliche Form der asymptotischen Darstellung von $I_n(\tilde{a}n)$, wie sie sich etwa aus der Paßmethode ergibt[3]):

$$(21)\qquad I_n(\tilde{a}\, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \operatorname{tg} \text{hyp}\, \alpha}} e^{n(\operatorname{tg} \text{hyp}\, \alpha - \alpha)} \left(1 + \frac{\tilde{E}}{n^{1/5}}\right).$$

§ 16.

Die Formeln, die wir für $w_n(aN)$ und $w_n'(aN)$ abgeleitet haben, behalten ihre Gültigkeit, wenn wir für a eine Funktion von N einsetzen, vorausgesetzt, daß $\theta \leqq a \leqq \text{const.} < 1$, also $N^{-2/3} \leqq a \leqq \text{const.} < 1$ von einem festen N ab.

Setzen wir $a = N^{\zeta - 1}$, wobei ζ eine Konstante sei, $\frac{1}{3} < \zeta < 1$; es wird:

$$\frac{a^{1/2}}{(1-a^2)^{1/4}} = N^{\frac{\zeta-1}{2}}(1 + N^{2(\zeta-1)}\, \varepsilon_1); \quad \frac{(1-a^2)^{1/4}}{a^{1/2}} = N^{\frac{1-\zeta}{2}}(1 + N^{2(\zeta-1)}\, \varepsilon_2)$$

$$\sqrt{1-a^2} = 1 + N^{2(\zeta-1)}\varepsilon_3; \quad \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a^2}{(1+\sqrt{1-a^2})^2}\right) = \frac{N^{\zeta-1}}{2}(1 + N^{2(\zeta-1)}\, \varepsilon_4)$$

[3]) Siehe Watson, „Treatise“ 8. 4., Formel (3).

$$\lg \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a} = \lg \frac{N^{\zeta-1}}{2} + \varepsilon_5 N^{2(\zeta-1)},$$

wobei die Größen ε beschränkte Funktionen von N sind; also:

$$(22)\quad \begin{cases} w_n(N^\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} N^{\frac{\zeta-1}{2}} \left(\dfrac{e}{2}\right)^N N^{(\zeta-1)N}\, e^{\varepsilon_5 N^{2\zeta-1}} (1 + N^{2(\zeta-1)}\,\varepsilon_1)\,(1 + N^{-1/5} E) \\ w_n'(N^\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} N^{\frac{1-\zeta}{2}} \left(\dfrac{e}{2}\right)^N N^{(\zeta-1)N}\, e^{\varepsilon_5 N^{2\zeta-1}} (1 + N^{2(\zeta-1)}\,\varepsilon_2)\,(1 + N^{-1/5} H). \end{cases}$$

Ist $\zeta > \frac{1}{2}$, so müssen wir in der Potenzreihe für $\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ auch Glieder höherer als dritter Ordnung in a berücksichtigen; je näher ζ an 1 liegt, desto mehr dieser Reihenglieder müssen zur Bildung des Hauptgliedes der asymptotischen Formel herangezogen werden (für $\zeta = 1$ müssen alle Glieder der Reihe berücksichtigt werden, d. h. der Ausdruck $\lg \dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ selbst, der dann im Hauptglied voll und ganz eingeht).

Ist aber $\zeta < \frac{1}{2}$, so wird $e^{\varepsilon_5 N^{2\zeta-1}} = 1 + \varepsilon_6 N^{2\zeta-1}$, und da $2(\zeta-1) < -1$:

$$w_n(N^\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N^{\frac{\zeta-1}{2}} N^{(\zeta-1)N} \left(\frac{e}{2}\right)^N (1 + \varepsilon_6 N^{2\zeta-1})\,(1 + N^{-1/5}\varepsilon)$$

$$w_n'(N^\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N^{\frac{1-\zeta}{2}} N^{(\zeta-1)N} \left(\frac{e}{2}\right)^N (1 + \varepsilon_6 N^{2\zeta-1})\,(1 + N^{-1/5}\varepsilon')$$

oder:

$$(23)\quad \begin{cases} w_n(n^\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\frac{\zeta-1}{2}} n^{(\zeta-1)n} \left(\dfrac{e}{2}\right)^n (1 + n^{2\zeta-1}\,\tilde{\varepsilon}_6)\,(1 + n^{-1/5}\tilde{\varepsilon}) \\ w_n'(n^\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{\frac{1-\zeta}{2}} n^{(\zeta-1)n} \left(\dfrac{e}{2}\right)^n (1 + n^{2\zeta-1}\,\tilde{\varepsilon}_7)\,(1 + n^{-1/5}\tilde{\varepsilon}'), \end{cases}$$

dies für $\frac{1}{3} < \zeta \leqq \frac{1}{2}$.

Diese letztere Formeln lassen sich auch direkt aus der Potenzreihe (2) für $w_n(x)$ ableiten (siehe § 1). Ihr Geltungsbereich erstreckt sich von $\zeta = -\infty$ bis $\zeta = +\frac{1}{2}$, die untere Schranke $\frac{1}{3}$ wurde durch die Besonderheiten der Methode hereingebracht [4]).

Das Restglied ist bis $\zeta = \frac{2}{5}$ von der Ordnung $N^{-1/5}$, von $\zeta = \frac{2}{5}$ bis $\zeta = \frac{1}{2}$ von der Ordnung $N^{2\zeta-1}$. Von $\zeta = \frac{1}{2}$ ab ändert sich das Hauptglied sprungweise bis $\zeta = 1$ [5]). Bei alledem haben wir als Argument nur Potenzen von N betrachtet, eventuell noch mit einer Konstante multipliziert. Dies läßt sich leicht vervollständigen. Unsere Formeln für $w_n(an)$ und $w_n'(an)$ und die Potenzreihe für $w_n(x)$ ergänzen einander und setzen uns instand, *bei großem n das Verhalten von w_n und w_n' zu untersuchen für Argumente aller Größenordnungen, die sich von der Null bis zu $(1-c)N$ erstrecken, wobei c eine beliebig kleine, feste Zahl bedeutet.*

§ 17. Die Stelle N.

Unsere asymptotischen Darstellungen versagen für $a = 1$. Um die Stelle N dennoch zu erreichen, keilen wir von aN bis N die rechte Seite $q(x)$ unserer Differentialgleichung

---

[4]) Es war $a \geqq \theta$, $\theta = N^{-\tau}$; die χ-Bestandteile von E_θ und H_θ wurden abgeschätzt durch const. $N^{\frac{3\tau}{2}-1}$ (siehe § 15).

[5]) Der Faktor $e^{\varepsilon_5 N^{2\zeta-1}}$ führt, wie schon bemerkt, dem Hauptgliede je nach der Größe von ζ verschiedene Bestandteile zu (s. Formel (22)).

ein zwischen zwei im Punkte $(N, 0)$ einmündende Geradenstücke q_1 und q_2, von denen der erstere die dortige Tangente an $q(x)$ sein soll, der zweite die Verbindungsstrecke der Punkte $(N, 0)$ und $(aN, q(aN))$ (siehe Fig. 4 S. 32). Dementsprechend bilden wir zwei Approximationsfunktionen u_1, u_2, die der Differentialgleichung $\frac{u''_{1,2}(x)}{u_{1,2}(x)} = q_{1,2}(x)$ genügen, sowie den Randbedingungen $u_{1,2}(aN) = w_n(aN)$; $u'_{1,2}(aN) = w'_n(aN)$.

Es ist dann:

$$u_1(N) \leqq w_n(N) \leqq u_2(N); \quad u'_1(N) \leqq w'_n(N) \leqq u'_2(N), \tag{24}$$

und der Parameter a ist dabei frei verfügbar.

Es ist $q_{1,2}(x) = -\frac{\lambda_{1,2}}{N}(x - N)$, wobei $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{1+a}{a^2}$. Wir führen eine neue Variable z ein:

$$z = \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{1/3}(N - x);$$

$u(x)$ geht dann über in eine Funktion $v(z)$, die der Differentialgleichung:

$$\frac{1}{v}\frac{d^2v}{d^2z} = z$$

genügt; ferner ist:

$$u(N) = v(0); \quad u'(N) = -\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{1/3} v'(0)$$

$$u(aN) = v(\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)); \quad u'(aN) = -\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{1/3} v'(\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)).$$

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit haben wir eine asymptotische Formel (I, (16)) für die Funktion v und deren Ableitung abgeleitet, die die Werte am Ursprung und an einer entfernten Stelle P miteinander linear verknüpft. Ersetzen wir darin P durch $\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)$ und $v(z)$ durch $u(x)$, so wird:

$$w_n(aN) = \left\{u(N)C_1\left(1 + \frac{R_1}{\lambda^{1/3}(1-a)N^{2/3}}\right) - \left(\frac{N}{\lambda}\right)^{1/3}u'(N)C_2\left(1 + \frac{R_2}{\lambda^{1/3}(1-a)N^{2/3}}\right)\right\}$$
$$\cdot \lambda^{-1/12}(1-a)^{-1/4}N^{-1/6}\exp\left(\tfrac{2}{3}\lambda^{1/2}(1-a)^{3/2}N\right)$$

$$w'_n(aN) = \left\{-\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{1/3}u(N)C_1\left(1 + \frac{R_3}{\lambda^{1/3}(1-a)N^{2/3}}\right) + u'(N)C_2\left(1 + \frac{R_4}{\lambda^{1/3}(1-a)N^{2/3}}\right)\right\}$$
$$\cdot \lambda^{1/12}(1-a)^{1/4}N^{1/6}\exp\left(\tfrac{2}{3}\lambda^{1/2}(1-a)^{3/2}N\right).$$

Die Determinante dieses Systems linearer Gleichungen für $u(N)$ und $u'(N)$ ist:

$$e^{4/3}P^{3/2}\begin{vmatrix} C_1\left(1 + \frac{R_1}{P}\right) & C_2\left(1 + \frac{R_2}{P}\right) \\ C_1\left(1 + \frac{R_3}{P}\right) & C_2\left(1 + \frac{R_4}{P}\right)\end{vmatrix} = 1,$$

wie wir schon früher bemerkten (I, (17)). Wir können nach $u(N)$ und $u'(N)$ auflösen und bekommen, wenn wir noch $w_n(aN)$ und $w'_n(aN)$ durch deren asymptotischen Wert ersetzen:

$$u(N) = \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}N^{1/6}e^{N\left(\sqrt{1-a^2}+\lg\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}+\frac{2}{3}\lambda^{1/2}(1-a)^{3/2}\right)}\left\{\frac{a^{1/2}}{(1+a)^{1/4}}\lambda^{1/12}\left(1+\frac{E}{N^{1/5}}\right)\left(1+\frac{R_4}{\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(1+a)^{1/4}}{a^{1/2}}\lambda^{-5/12}\left(1+\frac{H}{N^{1/5}}\right)\left(1+\frac{R_2}{\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)}\right)\right\}$$

(25)

$$u'(N) = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}N^{-1/6}e^{N\left(\sqrt{1-a^2}+\lg\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}+\frac{2}{3}\lambda^{1/2}(1-a)^{3/2}\right)}\left\{\frac{a^{1/2}}{(1+a)^{1/4}}\lambda^{5/12}\left(1+\frac{E}{N^{1/5}}\right)\left(1+\frac{R_3}{\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(1+a)^{1/4}}{a^{1/2}}\lambda^{-1/12}\left(1+\frac{H}{N^{1/5}}\right)\left(1+\frac{R_1}{\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)}\right)\right\}.$$

§ 18.

Nun müssen wir a mit N derart koppeln, daß sich für $u_1(N)$ und $u_2(N)$ asymptotische Formeln mit demselben Hauptglied ergeben. Wir betrachten zunächst den Exponentialfaktor und setzen $1-a=\sigma$. Es wird:

$$\sqrt{1-a^2}+\lg\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}+\tfrac{2}{3}\lambda^{1/3}\sigma^{3/2}=\tfrac{2}{3}\sigma^{3/2}\left\{\lambda^{1/3}-\sqrt{2}\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)^{3/2}\right\}$$
$$-\sigma^{5/2}\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)^{5/2}\left\{\frac{2^{5/2}}{5}+\frac{2^{7/2}}{7}\sigma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)+\cdots\right\}$$
$$+\sigma^2\left\{\left(1-\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)+\frac{\sigma}{3}\left(1-\frac{2^3}{2}\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)^3\right)+\cdots\right\}.$$

Der dritte Summand verschwindet mit σ von der Ordnung σ^3; der zweite, wie $\sigma^{5/2}$; der erste auch wie $\sigma^{5/2}$, einerlei ob wir $\lambda=\lambda_1=2$ oder $\lambda=\lambda_2=\dfrac{1+a}{a^2}$ setzen. Der Exponentialfaktor unterscheidet sich also von 1 um eine Größe von der Ordnung $N\sigma^{5/2}$, die also von kleinerer Ordnung ist als $N^{-\beta}$, falls $\sigma\leqq N^{-2/5(\beta+1)}$.

Die R-Funktionen bleiben unterhalb einer von a unabhängigen Schranke, falls P mit N wächst, also falls $\sigma>N^{-2/3}$. Die Glieder $\dfrac{R_{1,2,3,4}}{\lambda^{1/3}N^{2/3}(1-a)}$ sind also von kleinerer Ordnung als $N^{-\beta}$, falls $\sigma>N^{\beta-2/3}$. Die Bedingungen $\sigma>N^{\beta-2/3}$ und $\sigma<N^{-2/3(\beta+1)}$ sind dann und nur dann miteinander verträglich, wenn $\beta<\frac{4}{21}<\frac{1}{5}$.

Genügt β dieser Bedingung, so sind die Größen $\dfrac{a^{1/3}}{(1+a)^{1/4}}$, $\dfrac{(1+a)^{1/4}}{a^{1/2}}$; $\lambda^{1/12}$, $\lambda^{-1/12}$; $\lambda^{5/12}$, $\lambda^{-5/12}$ respektiv gleich $2^{-1/4}$, $2^{1/4}$; $2^{1/12}$, $2^{-1/12}$; $2^{5/12}$, $2^{-5/12}$, sowohl für $\lambda=\lambda_1$ wie für $\lambda=\lambda_2$ — bis auf einen Klammerfaktor $\left(1+\dfrac{r}{N^\beta}\right)$, wo r in N beschränkt ist.

Nehmen wir endlich das Beschränktsein von E und H bei dieser Koppelung an (siehe § 19), so wird:

$$(26)\qquad \begin{aligned} u_1(N)&=\frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/6}\left(1+\frac{\eta_1}{N^\beta}\right);\quad u_1'(N)=\frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}\right)^{-1/6}\left(1+\frac{\eta_1}{N^\beta}\right)\\ u_2(N)&=\frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/6}\left(1+\frac{\eta_2}{N^\beta}\right);\quad u_2'(N)=\frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}\right)^{-1/6}\left(1+\frac{\eta_2}{N^\beta}\right),\end{aligned}$$

wobei η_1, η_2; η_1', η_2' beschränkte Funktionen von N sind für $N>\text{const.}$

Setzen wir nun rein formal:

$$w_n(N)=\frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/6}\left(1+\frac{\omega}{N^\beta}\right);\quad w_n'(N)=\frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{N}{2}\right)^{-1/6}\left(1+\frac{\omega'}{N^\beta}\right),$$

so folgt aus den Ungleichungen (24) des vorigen Paragraphen in Verbindung mit den asymptotischen Formeln (26) für u_1, u_2; u_1', u_2', daß die Funktionen $|\omega|$ und $|\omega'|$ in N beschränkt sind. Es ist also an der kritischen Stelle N:

$$(27)\qquad \begin{cases} w_n(N)=\dfrac{C_2}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{N}{2}\right)^{1/6}\left(1+\dfrac{\omega}{N^\beta}\right)\\ w_n'(N)=\dfrac{C_1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{N}{2}\right)^{-1/6}\left(1+\dfrac{\omega'}{N^\beta}\right),\end{cases}$$

wobei C_1, C_2 Konstanten, $|\omega|$ und $|\omega'|$ beschränkte Funktionen von N für $N>\text{const.}$, und β eine Zahl, die bis $\frac{4}{21}$ heraufgeschraubt werden kann.

§ 19.

Zur Vervollständigung dieses letzten Beweises müßte noch gezeigt werden, daß, bei der angewandten Koppelung von N mit a, die Größen $|E|$ und $|H|$ beschränkt bleiben, sobald N größer ist als eine Konstante. Dazu müßte die Abschätzung der in E_ϑ und H_ϑ eingehenden Größen ψ und χ verschärft werden und die verschiedenen Schranken auf ihre Abhängigkeit von $1 - a^2$ untersucht. (Im wesentlichen würde es sich darum handeln, für $e^{-2N\int_t^s p d\xi}$ eine bessere Majorante als $\left(\frac{t}{s}\right)^{2N\sqrt{1-a^2}}$ zu verwenden.)

Die Formeln (27) beziehen sich, wie aus der Art ihrer Gewinnung ersichtlich, zunächst nur auf die Stelle N selbst, nicht auf ihre Umgebung, so daß wir das Verhalten von w_n, w_n' für die Argumente nicht kennen, deren Größenordnung sich von $(1 - c)\,N$ bis N erstreckt. Es wäre interessant zu untersuchen, ob nicht auch diese Zwischenzone dadurch erforscht werden könnte, daß wir, von den oben abgeleiteten asymptotischen Formeln in N ausgehend, durch rückläufige Treppenbildung die rechte Seite q unserer Differentialgleichung von N bis $N - \varepsilon(N)$ einfangen; die Stufenlänge wäre dabei in passender Abhängigkeit von N zu wählen.

Wahrscheinlich wäre es auf diese Art möglich, erstens die Formeln für $w_n(N)$ und $w_n'(N)$ auf einen Bereich des Argumentes um N zu erweitern [6]); und ferner, die Formeln von Nicholson [7]) in der sogenannten „transitional region" zu gewinnen.

III. Die Nullstellen der Besselschen Funktion.

§ 1.

Von der Nullstelle am Ursprung sehen wir ab. Die Funktionen w_n und I_n haben dieselben Nullstellen. Bis N ist w_n eine monoton zunehmende Funktion; das Gebiet der Nullstellen und Extremwerte von w_n fängt also rechts vom ersten Wendepunkte an, dort wo die rechte Seite der Differentialgleichung negativ wird.

Die Konstruktion von Treppenwegen, deren Stufen horizontale Geradenstücke sind, führt hier zum Einfangen von w_n zwischen Annäherungsfunktionen, die aus Sinusbögen stetig zusammengesetzt sind — dies gilt wenigstens bis zur ersten Nullstelle der Minorante (siehe Einleitung). Die erste Nullstelle von $w_n(x)$ ist auf diese Art zwischen den ersten Nullstellen beider Annäherungsfunktionen eingeengt. Wir brauchen also lediglich Aussagen über das Verschwinden der beiden Approximationsfunktionen. Folglich können wir statt dieser Funktionen ebensogut die Phase der Sinusbögen untersuchen, aus denen sie bestehen. Jeder Approximationsfunktion wird auf diese Art eine Phasenfunktion zugeordnet, die (bei passender Beseitigung der Vieldeutigkeit) bloß an den Übergangsstellen von einem Sinusbogen zum nächsten eine sprunghafte Unstetigkeit aufweist. An diesen Stellen werden die links- und rechtsseitigen Phasenwerte durch eine einfache Gleichung verknüpft.

Das System dieser k Gleichungen geht bei unbeschränkter Vermehrung der Stufenzahl über in eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir sind aber in der Lage, diesen ersten Teil der Überlegung zu überspringen und unser Resultat direkt zu gewinnen, ohne Anwendung der Treppenmethode. Dazu betrachten wir von Anfang an die lokale Phase der w_n-Funktion, die wir uns aus infinitesimalen Sinusbögen zusammengesetzt denken.

---

[6]) Siehe im dritten Teil die Formel für $w_n(n)$, § 3.

[7]) Siehe Watson, „Treatise" 8. 43.

§ 2.

$w_n(x)$ genügt der Differentialgleichung:

$$w_n'' - q(x)\, w_n = 0, \tag{1}$$

wobei $q(x) = \dfrac{N^2 - x^2}{x^2}$, $N^2 = n^2 - \frac{1}{4}$. Die Gleichungen:

$$\begin{aligned} w_n(x) &= \omega(x) \sin \mathfrak{L}(x) \\ w_n'(x) &= \omega(x) \sqrt{-q(x)} \cos \mathfrak{L}(x) \end{aligned} \tag{2}$$

(wobei $\sqrt{-q}$ positiv zu nehmen ist) bestimmen uns die Phasenfunktion $\mathfrak{L}(x)$ bis auf ein Vielfaches von 2π, solange nicht $w_n = w_n' = 0$ (und für $x \geqq N$).

w_n und dessen Ableitung können nicht gleichzeitig verschwinden, wie aus der Form der Differentialgleichung (1) ersichtlich. Wir ergänzen die Definition von $\mathfrak{L}$, indem wir für diese Funktion Stetigkeit fordern an jeder Stelle x ($x \geqq N$), auch an den Nullstellen von $w_n(x)$ und $w_n'(x)$. Ferner, indem wir uns in der Nachbarschaft von N für den Zweig von $\mathfrak{L}$ entscheiden, für den $0 < \mathfrak{L} < 2\pi$.

Durch diese beide Forderungen ist $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt für $x \geqq N$. Außerdem verschwindet w_n, so oft die zugehörige Phasenfunktion gleich einem Vielfachen von π wird, und umgekehrt; und w_n erreicht einen Extremwert dann und nur dann, wenn die Phasenfunktion gleich wird einem Vielfachen von $\dfrac{\pi}{2}$.

Diese Funktion $\mathfrak{L}$ genügt einer Differentialgleichung, die wir gewinnen, indem wir aus den Definitionsgleichungen (2) von $\mathfrak{L}$ und aus der Differentialgleichung (1) von w_n die Größen w_n, w_n', w_n'' eliminieren:

$$\frac{d\mathfrak{L}(x)}{dx} = \sqrt{-q(x)} + \frac{1}{4}\frac{q'(x)}{q(x)} \sin 2\mathfrak{L}(x). \tag{3}$$

Wir können auch diese Differentialgleichung als Definition für $\mathfrak{L}$ gelten lassen, falls wir noch den Wert angeben, den $\mathfrak{L}$ an irgendeiner Stelle $x_0 > N$ annimmt. Dazu benutzen wir die asymptotischen Formeln für w_n und w_n' an der Stelle $x_0 = n$, die ja rechts von N liegt; wir werden diese Formeln im nächsten Paragraphen aus den Formeln für $w_n(N)$ und $w_n'(N)$ ableiten.

§ 3.

Wir wollen nun zeigen, daß die erste Nullstelle (bzw. der erste Extremwert) von w_n durch Größen vom Typus $N + \text{const.}\, N^{1/3}$ minorisiert und majorisiert werden kann.

An der Stelle N hatten wir [8]):

$$w_n(N) = c_1 N^{1/6}\Big(1 + \frac{r_1}{N^\beta}\Big); \quad w_n'(N) = c_2\, N^{-1/6}\Big(1 + \frac{r_2}{N^\beta}\Big),$$

wobei c_1, c_2 positive, nicht verschwindende Konstanten, und $|r_1|, |r_2|$ in N beschränkt sind; β war eine feste Zahl, unterhalb $\frac{4}{21}$.

Von N ab wird die rechte Seite q unserer Differentialgleichung negativ; wir schließen sie zwischen zwei Approximationswegen ein (Fig. 5). Der obere Weg soll aus zwei Stücken bestehen: von N bis $N + \delta$ aus der Abszisse, von $N + \delta$ ab aus der Horizontalen

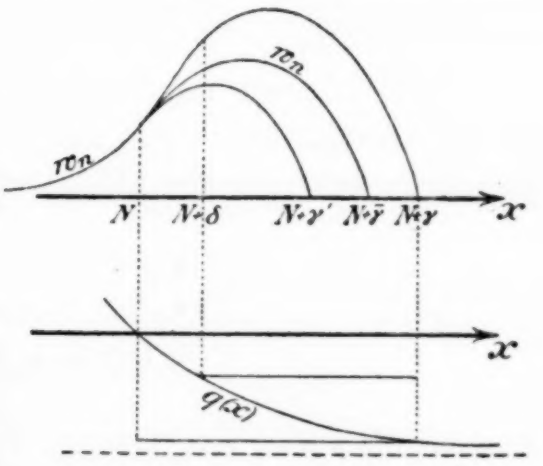


Fig. 5.

[8]) Siehe im zweiten Teil Formel (27); nach der dortigen Notierung ist

$$c_1 = \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}}\, 2^{-1/6}; \quad c_2 = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}\, 2^{1/6}; \quad \frac{1}{2}\frac{c_1}{c_2} = 2^{-4/3}\frac{C_2}{C_1}.$$

$y = q\,(N + \delta)$. Die entsprechende Approximationskurve besteht von N bis $N + \delta$ aus dem Geradenstück:

$$y = c_2\,(x - N)\,N^{-1/6}\Big(1 + \frac{r_2}{N^\beta}\Big) + c_1\,N^{1/6}\Big(1 + \frac{r_1}{N^\beta}\Big);$$

von da ab aus der Kurve:

$$y = \frac{\mathfrak{c}_2}{p}\sin p\,(x - (N + \delta)) + \mathfrak{c}_1 \cos p\,(x - (N + \delta)),$$

wobei:

$$\mathfrak{c}_1 = c_2\,\delta N^{-1/6}\Big(1 + \frac{r_2}{N^\beta}\Big) + c_1\,N^{1/6}\Big(1 + \frac{r_1}{N^\beta}\Big);\quad \mathfrak{c}_2 = c_2\,N^{1/6}\Big(1 + \frac{r_2}{N^\beta}\Big);\ p = +\sqrt{-q(N+\delta)}.$$

Die erste Nullstelle dieser Funktion im Gebiete $x > N$ liegt bei $N + \nu$, wobei:

$$\nu = \delta + \frac{1}{p}\Big(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\mathfrak{c}_1 p}{\mathfrak{c}_2}\Big).$$

Von dieser Stelle $N + \nu$ gehen wir für die Konstruktion des unteren Weges aus, wir nehmen als solchen die Horizontale $y = q\,(N + \nu)$. Die entsprechende Approximationsfunktion ist:

$$c_2\Big(1 + \frac{r_2}{N^\beta}\Big)\frac{N^{-1/6}}{p'}\sin p'(x - N) + c_1\Big(1 + \frac{r_1}{N^\beta}\Big)N^{1/6}\cos p'(x - N),$$

wobei $p' = +\sqrt{-q\,(N + \nu)}$. Ihre erste Nullstelle nach N liegt bei $N + \nu'$, wobei:

$$\nu' = \frac{1}{p'}\Big(\pi - \operatorname{arctg}\frac{c_1\Big(1 + \frac{r_1}{N^\beta}\Big)}{c_2\Big(1 + \frac{r_2}{N^\beta}\Big)}N^{1/3}\,p'\Big).$$

q ist von N bis $N + \nu$ zwischen beiden Wegen eingeklemmt, folglich ist $\nu' < \bar{\nu} < \nu$, wobei $N + \bar{\nu}$ die erste Nullstelle von $w_n(x)$ sein soll. Die Diskussion zeigt, daß für die Schranken ν' und ν ein Optimum erreicht wird, wenn wir $\delta = \text{const.}\ N^{1/3}$ setzen. Es wird dann:

$$\zeta_2\,N^{1/3}(1 + \varepsilon_2(N)) < \bar{\nu} < \zeta_1\,N^{1/3}(1 + \varepsilon_1(N)) \qquad \text{für } N > N_0,$$

hierbei ist $\lim\limits_{N\to\infty} |\,\varepsilon_1|, |\,\varepsilon_2| = 0$, und ζ_1, ζ_2 sind Konstanten; Gleichheit dieser Konstanten läßt sich hier noch nicht erreichen. Jedenfalls kann also für großes N die erste Nullstelle von $w_n(x)$ zwischen zwei Größen vom Typus $N + \text{const.}\ N^{1/3}$ eingeengt werden; entsprechendes läßt sich für das erste Extremum zeigen.

Wir können unsere beiden Approximationskurven nun auch dazu benutzen, w_n bei n abzuschätzen; denn sie sind von N bis n samt ihrer Ableitung positiv für großes N, die Sturmschen Sätze sind anwendbar. Die Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} w_n(n) &= c_1\,N^{1/6}\Big(1 + \frac{\bar{r}_1}{N^\beta}\Big) = c_1\,n^{1/6}\Big(1 + \frac{\tilde{r}_1}{n^\beta}\Big) \\ w_n'(n) &= c_2\,N^{-1/6}\Big(1 + \frac{\bar{r}_2}{N^\beta}\Big) = c_2\,n^{-1/6}\Big(1 + \frac{\tilde{r}_2}{n^\beta}\Big), \end{aligned} \tag{4}$$

$\beta < \frac{4}{21}$; die r sind beschränkt. Das Hauptglied ändert sich also zwischen N und n nicht[9]).

[9]) Wir könnten schon mit diesen Formeln operieren, ziehen es aber vor, zur Verschärfung der weiteren Resultate von nun an die genaueren asymptotische Ausdrücke zu verwenden:

$$w_n(n) = c_1\,N^{1/6}\Big(1 + \frac{\bar{r}_1}{N^{1/3}}\Big);\ w_n'(n) = c_2\,N^{-1/6}\Big(1 + \frac{\bar{r}_2}{N^{1/3}}\Big). \tag{4 a}$$

§ 4.

Wir kehren zu unserer Funktion $\mathfrak{L}$ zurück und führen eine neue Variable τ ein durch die Substitution: $x = N + \tau N^{1/3}$. $\mathfrak{L}$ geht über in eine Funktion von τ, die wir mit demselben Buchstaben bezeichnen: $\mathfrak{L}(\tau)$; wir haben nun die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\tau} = \sqrt{2\tau} + \frac{\sin 2\mathfrak{L}}{4\tau} + \varepsilon, \tag{5}$$

wobei

$$\varepsilon(\tau, \mathfrak{L}; N) = \sqrt{2\tau}\left\{\frac{\left(1 + \frac{\tau}{2}N^{-2/3}\right)^{1/2}}{1 + \tau N^{-2/3}} - 1\right\} + \frac{\sin 2\mathfrak{L}}{4\tau}\left\{\frac{1}{(1 + \tau N^{-2/3})\left(1 + \frac{\tau}{2}N^{-2/3}\right)} - 1\right\}.$$

An der Stelle $x_0 = n$ oder $\tau_0 = \frac{1}{8}N^{-1/3}\left(1 + \frac{r}{N^2}\right)$ ist $\operatorname{tg}\mathfrak{L} = \sqrt{-q(n)}\,\frac{w_n(n)}{w_n'(n)}$, also:

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}(\tau_0) = \frac{1}{2}\frac{c_1}{c_2}N^{-2/3}\left(1 + \frac{R}{N^{2/3}}\right),$$

wobei $|r|$ und $|R|$ in N beschränkt sind. Für $|\varepsilon|$ bekommen wir die Abschätzung:

$$|\varepsilon| \leqq N^{-2/3}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\tau^{2/3} + \frac{|\sin 2\mathfrak{L}|}{2}\right) \leqq N^{-2/3}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\tau^{3/2} + \frac{1}{2}\right) \tag{5 a}$$

oder: $$|\varepsilon| \leqq 2N^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{2}{3}} \text{ im Intervall } 0 \leqq \tau \leqq N^{\alpha},\ 0 < \alpha < \tfrac{2}{3}.$$

Die Größe ε wird also bei wachsendem N sehr klein in einem weiten Gebiete der Variablen τ. Abgesehen von ε geht in die Differentialgleichung (5) der Parameter N nicht mehr ein. Unser Ziel ist nun, $\mathfrak{L}$ mit einer anderen Funktion von τ zu vergleichen, welche von N nicht abhängt; zu zeigen, daß $\mathfrak{L}$ sich letzterer bei wachsendem N immer mehr nähert und daß folglich die Werte von τ, für die $\mathfrak{L} = k\pi$ oder $\mathfrak{L} = k\frac{\pi}{2}$ wird, sich von gewissen festen Zahlen um Größen unterscheiden, die für $N \to \infty$ verschwinden. Damit hätten wir eine asymptotische Darstellung für die Nullstellen und Extremwerte von w_n.

§ 5.

Wir vergleichen zunächst $\mathfrak{L}$ mit der Funktion y, die der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{d\tau} = \sqrt{2\tau} + \frac{\sin 2y}{4\tau} \tag{6}$$

genügt, und bei τ_0 denselben Wert $\mathfrak{L}_0$ annimmt wie $\mathfrak{L}$. Sukzessive Approximation ergibt:

$$\mathfrak{L}_1(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{2\tau}\,d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\sin 2\mathfrak{L}_0}{4\tau}d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon(\tau, \mathfrak{L}_0; N)\,d\tau + \mathfrak{L}_0; \qquad y_1(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{2\tau}\,d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\sin 2\mathfrak{L}_0}{4\tau}d\tau + \mathfrak{L}_0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\mathfrak{L}_\nu(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{2\tau}\,d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\sin 2\mathfrak{L}_{\nu-1}}{4\tau}d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau}\varepsilon(\tau, \mathfrak{L}_{\nu-1}; N)\,d\tau + \mathfrak{L}_0; \quad y_\nu(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau}\sqrt{2\tau}\,d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau}\frac{\sin 2y_{\nu-1}}{4\tau}d\tau + \mathfrak{L}_0,$$

also:

$$|\mathfrak{Y}_1(\tau) - y_1(\tau)| \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} |\varepsilon(\tau, \mathfrak{Y}_0;\ N)|\, d\tau$$

$$|\mathfrak{Y}_2(\tau) - y_2(\tau)| \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} |\varepsilon(\tau, \mathfrak{Y}_1;\ N)|\, d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{|\mathfrak{Y}_1 - y_1|}{2\tau}\, d\tau \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} |\varepsilon(\tau, \mathfrak{Y}_1;\ N)|\, d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi_1}{2\xi_1} \int_{\tau_0}^{\xi_1} |\varepsilon(\xi_1, \mathfrak{Y}_0;\ N)|\, d\xi_2$$

$$\vdots$$

$$|\mathfrak{Y}_\nu(\tau) - y_\nu(\tau)| \leqq \int_{\tau_0}^{\tau} |\varepsilon(\xi, \mathfrak{Y}_{\nu-1};\ N)|\, d\xi + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi_1}{2\xi_1} \int_{\tau_0}^{\xi_1} |\varepsilon(\xi_2, \mathfrak{Y}_{\nu-2};\ N)|\, d\xi_2 + \cdots + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi_1}{2\xi_1} \int_{\tau_0}^{\xi_1} \cdots \int_{\tau_0}^{\xi_{\nu-1}} |\varepsilon(\xi_\nu, \mathfrak{Y}_0;\ N)|\, d\xi_\nu$$

und, nach Einsetzen der Majorante für $|\varepsilon|$:

$$|\mathfrak{Y}_\nu - y_\nu| \leqq 2N^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{2}{3}} \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} d\xi + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi_1}{2\xi_1} \int_{\tau_0}^{\xi_1} d\xi_2 + \cdots \right\}.$$

Die unendliche Reihe auf der rechten Seite hat den Wert $2\tau^{1/2}(\tau^{1/2} - \tau_0^{1/2})$; also ist:

(7) $|\mathfrak{Y}_\nu(\tau) - y_\nu(\tau)| \leqq 4N^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{2}{3}}$ und folglich
$|\mathfrak{Y}(\tau) - y(\tau)| \leqq 4N^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{2}{3}}$ im Gebiete $\tau_0 \leqq \tau \leqq N^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{2}{3}$.

Eine ähnliche Rechnung liefert uns für die Differenz der Lösungen y und y^* derselben Differentialgleichung $\frac{dy}{d\tau} = \sqrt{2\tau} + \frac{\sin 2y}{4\tau}$, für die $y(\tau_0) = y_0$, $y^*(\tau_0) = y_0^*$ ist, die Abschätzung:

(8) $$|y(\tau) - y^*(\tau)| \leqq |y_0 - y_0^*| \left(1 + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\xi}{2\xi} + \cdots\right) = |y_0 - y_0^*| \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \quad \text{für } \tau \geqq \tau_0.$$

§ 6.

Wir beschäftigen uns nun mit den Lösungen der Differentialgleichung

(9) $$\frac{df}{d\tau} = \sqrt{2\tau} + \frac{\sin 2f}{4\tau}$$

bei positiven Werten der Variablen τ (siehe Fig. 6). Diese Differentialgleichung besitzt Knoten an den Stellen $(\tau = 0, f = k\pi)$; Sattelpunkte bei $\left(0, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$; sonst ist sie regulär.

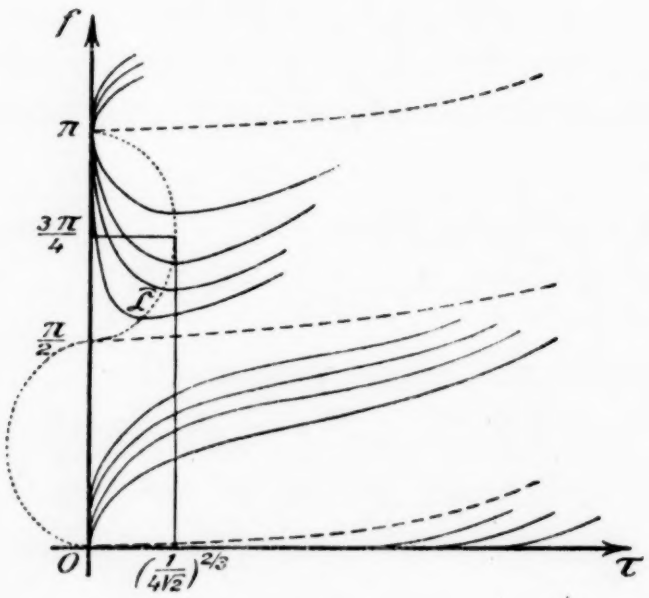


Fig. 6.

In jedem Knoten und in jedem Sattelpunkt mündet je eine Lösung horizontal ein; alle anderen münden mit senkrechter Tangente in einem Knotenpunkt. Es genügt, den Streifen der τ, f-Ebene zu betrachten, der sich zwischen den in $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ einmündenden Lösungen befindet, da die rechte Seite der Gleichung in f periodisch ist mit der Periode π. Zunächst stellen wir fest, daß die Lösungskurven, die im Ursprung vertikal und durch positive Werte einmünden, alle positive, monoton zunehmende Funktionen sind.

In der Tat: Die Kurve $\mathfrak{C}: f = \frac{1}{2} \arcsin(-4\sqrt{2}\tau^{3/2})$ ist der Ort der Punkte, deren Richtungselement horizontal verläuft. Fassen wir nun eine bestimmte Lösung der Differentialgleichung ins Auge, die zum positiven Büschel im Ursprung gehört. Schneidet sie $\mathfrak{C}$, so muß das zum ersten Male auf dem Bogen $\overline{\mathfrak{C}}$ geschehen, der die Punkte $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ miteinander verbindet; die Steigung von $\overline{\mathfrak{C}}$ nimmt zwischen $\tau = 0$ und $\tau = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3}$ monoton zu von 0 bis ∞. Für kleine Werte von τ liegt unsere Lösung unterhalb $\overline{\mathfrak{C}}$. Es habe ihr erster Schnittpunkt mit $\overline{\mathfrak{C}}$ die Abzisse τ_s; im Schnittpunkt verläuft die Lösung horizontal, muß also in der Umgebung von τ_s (für $\tau < \tau_s$) oberhalb $\overline{\mathfrak{C}}$ liegen; folglich konnte τ_s nicht die Abzisse des ersten Schnittpunktes sein. Aus diesem Widerspruch erhellt die Richtigkeit unserer Behauptung.

§ 7.

Zur genaueren Untersuchung des im Ursprung der τ, f-Ebene gelagerten singulären Punktes führen wir neue Variable σ, u ein durch die Transformation:

$$\tau = \sigma^2; \quad f = u\sigma.$$

Die rechte τ, f-Halbebene wird hierdurch auf die rechte σ, u-Halbebene ein-eindeutig abgebildet — vom Rande abgesehen; dem Nullpunkt der τ, f-Ebene entspricht der ganze Rand $\sigma = 0$ der σ, u-Ebene, wir haben also den singulären Punkt, den wir untersuchen wollen, gewissermaßen auseinandergezogen. Unsere Differentialgleichung (9) geht hierbei über in:

$$\frac{du}{d\sigma} = 2\sqrt{2}\,\sigma + \frac{\sin 2u\sigma - 2u\sigma}{2\sigma^2}. \tag{10}$$

Letztere Gleichung besitzt keine singulären Stellen. Sie hat Lösungen, die bei $\sigma = 0$ jeden vorgeschriebenen Wert annehmen. Hieraus folgt:

Jedem Werte des Parameters λ entspricht eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung (9), für die $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}} = \lambda$.

(Umgekehrt läßt sich auch zeigen, daß $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}}$ stets existiert, wenn f eine im Ursprung einmündende Lösung von (9) ist; wir werden diese Umkehrung aber im folgenden nicht gebrauchen.) Wir vergleichen nun die Funktionen $f(\tau)$ mit den im Ursprung einmündenden Lösungen

$$h(\tau) = \sqrt{2}\,\tau^{3/2} + \lambda\tau^{1/2}; \quad g(\tau) = \operatorname{arctg}(\lambda\tau^{1/2}) \text{ der Differentialgleichungen:}$$

$$\frac{dh}{d\tau} = \sqrt{2\tau} + \frac{h}{2\tau}; \quad \frac{dg}{d\tau} = \frac{\sin 2g}{4\tau}. \tag{11}$$

Bei positivem τ und f ist:

$$\sqrt{2\tau} + \frac{f}{2\tau} > \sqrt{2\tau} + \frac{\sin 2f}{4\tau} > \frac{\sin 2f}{4\tau}. \tag{11 a}$$

Sind f, h, g drei Lösungen der Gleichungen (9) und (11), welche demselben positiven Parameterwert λ zugeordnet sind, so daß $\lim_{\tau\to 0} \frac{f}{\sqrt{\tau}} = \lim_{\tau\to 0} \frac{g}{\sqrt{\tau}} = \lim_{\tau\to 0} \frac{h}{\sqrt{\tau}} = \lambda$, so ist für alle positiven Werte von τ:

$$g(\tau) \leqq f(\tau) \leqq h(\tau). \tag{12}$$

Wir führen den Beweis etwa für g und f.

Es sei in einem τ-Intervall $g > f$; dies Intervall muß jedenfalls bis zur Stelle $\tau = 0$ reichen, sonst hätten wir an der ersten Schnittstelle $\frac{dg}{d\tau} \geqq \frac{df}{d\tau}$, was nicht möglich ist.

Bleibt also die Möglichkeit, g sei größer als f entweder für alle τ oder bis τ_1 etwa. Wir wählen dann eine Zwischenstelle $\tau_2 (0 < \tau_2 < \tau_1$, bzw. $0 < \tau_2 < \infty)$ und legen durch den Punkt $(\tau_2, f(\tau_2))$ eine Lösung g^* der zweiten Vergleichsgleichung (11) (siehe Fig. 7).

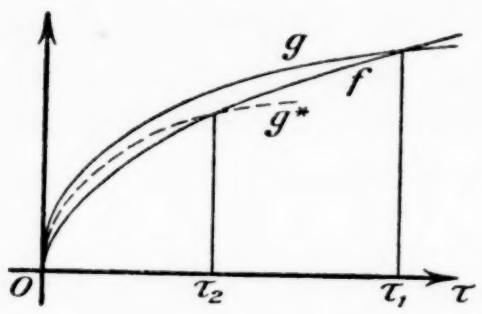


Fig 7.

Im Intervall $0 < \tau < \tau_2$ ist dann $g^* > f$, dies folgt aus der zweiten Ungleichung (11 a)[10]; aber zu gleicher Zeit ist $g^* < g$, da zwei Lösungen derselben Gleichung (11) sich außer im Ursprung nicht schneiden können. In diesem Intervall ist also g^* zwischen zwei Kurven eingefangen, die demselben Parameter zugehören, woraus auch folgt: $\lim_{\tau\to 0} \frac{g^*}{\sqrt{\tau}} = \lambda$; g^* und g können aber nicht gleichen Parameterwert besitzen.

Ebenso läßt sich zeigen, daß $f \leqq h$.

§ 8.

Nun sind wir imstande, die Funktion $\mathfrak{L}(\tau; N)$ mit einer von N unabhängigen Funktion zu vergleichen. Zuerst hatten wir (siehe Formel (7)):

$$|\mathfrak{L}(\tau) - y(\tau)| \leqq \text{const. } N^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{2}{3}}$$

für $\tau_0 \leqq \tau \leqq N^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{2}{3}$, $N > N_0$, wobei y die Differentialgleichung (6) löst und an der Stelle τ_0 den Wert $\mathfrak{L}_0$ erreicht.

Nun vergleichen wir $y(\tau)$ mit $y^*(\tau)$, einer Lösung derselben Gleichung, für die aber $y^*(\tau_0) = \sqrt{2}\,\frac{c_1}{c_2}\,\tau_0^{\frac{1}{2}}$. Es war:

---

[10]) In τ_2 ist $\frac{dg^*}{d\tau} < \frac{df}{d\tau}$, also zunächst $g^* > f$ (für $\tau < \tau_2$); dies bleibt so bis $\tau = 0$, weil g^* sonst f schneiden müßte, also im Schnittpunkt $\frac{dg^*}{d\tau} \geqq \frac{df}{d\tau}$ wäre, was nicht möglich ist.

$$\mathfrak{L}_0 = \frac{c_1}{2c_2} N^{-2/3}\left(1 + \frac{R}{N^{2/3}}\right);\ \tau_0 = \frac{1}{8} N^{-1/3}\left(1 + \frac{r}{N^2}\right),\quad \text{also}$$

$$|\mathfrak{L}_0 - \sqrt{2}\,\frac{c_1}{c_2}\,\tau_0^{\frac{1}{2}}| \leqq \text{const. } N^{-1/3} \quad \text{und}$$

$$|y(\tau) - y^*(\tau)| \leqq |y(\tau_0) - y^*(\tau_0)| \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \leqq \text{const. } N^{\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}}$$

für $\tau_0 < \tau < N^\alpha$, $\alpha > 0$, $N > N_0$. Endlich vergleichen wir y^* mit der Lösung $L(\tau)$ der Differentialgleichung (6), die dem Parameterwerte $\lambda = \lim_{\tau \to 0} \frac{L(\tau)}{\sqrt{\tau}} = \sqrt{2}\,\frac{c_1}{c_2}$ zugeordnet ist. Nach dem im vorigen Paragraphen abgeleiteten Satze ist:

$$\text{arctg}\,(\lambda\tau^{\frac{1}{2}}) < L(\tau) < \sqrt{2}\,\tau^{\frac{3}{2}} + \lambda\tau^{\frac{1}{2}};\ \text{andererseits aber:}$$

$$\text{arctg}\,(\lambda\tau^{\frac{1}{2}}) < \sqrt{2}\,\frac{c_1}{c_2}\,\tau^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}\,\tau^{\frac{3}{2}} + \lambda\tau^{\frac{1}{2}},\ \text{und folglich:}$$

$$|L(\tau) - \sqrt{2}\,\frac{c_1}{c_2}\,\tau^{\frac{1}{2}}| \leqq \sqrt{2}\,\tau^{\frac{3}{2}} + \lambda\tau^{\frac{1}{2}} - \text{arctg}\,(\lambda\tau^{\frac{1}{2}});\ \text{speziell:}$$

$$|L(\tau_0) - y^*(\tau_0)| \leqq \text{const. } \tau_0^{\frac{3}{2}} \ \text{ für } N > N_0$$

und, da ja

$$|L(\tau) - y^*(\tau)| \leqq |L(\tau_0) - y^*(\tau_0)| \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}},$$

$$|L(\tau) - y^*(\tau)| \leqq \text{const. } N^{\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{3}}.$$

Wir fassen zusammen:

(13) $$|\mathfrak{L}(\tau; N) - L(\tau)| \leqq |\mathfrak{L} - y| + |y - y^*| + |y^* - L|$$
$$\leqq \text{const. } N^{\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}} + \text{const. } N^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{2}{3}} + \text{const. } N^{\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{3}} \leqq \text{const. } N^{\frac{5\alpha}{2} - \frac{2}{3}}$$

im Bereiche $\tau_0 \leqq \tau \leqq N^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{2}{3}$ für $N > N_0$.

Die Funktion L enthält N nicht mehr.

§ 9.

L ist eine monotone, positive Funktion; ihre Ableitung bleibt für unbeschränkte positive Werte von τ oberhalb einer festen Schranke (für endliche τ-Intervalle haben wir das in § 6 gezeigt und ferner ist ja $\frac{dL}{d\tau} > \sqrt{2\tau} - \frac{1}{4\tau}$).

Für großes τ hat die Funktion die Größenordnung const. $\tau^{3/2}$, wie aus ihrer Differentialgleichung abgelesen werden kann.

Wir betrachten nun die Funktionen $\mathfrak{L}$ und L im Intervall:

(13 a) $$\zeta \leqq \tau < N^\alpha,$$

wobei $\alpha < \frac{4}{15}$ und ζ eine kleine, feste Zahl. Wir können ζ so wählen, daß im Intervall $0 \leqq \tau \leqq \zeta$ kein Extremwert und keine Nullstelle von w_n liegt (siehe § 3).

L ist die Achse einer Röhre, innerhalb deren $\mathfrak{L}$ verläuft. Der vertikale Querschnitt dieser Röhre verschwindet mit wachsendem N gleichmäßig im ganzen Intervall. Dies gilt auch von deren horizontalem Querschnitt, da, wie wir sahen, $\frac{dL}{d\tau}$ eine positive untere Schranke besitzt. Aus der Existenz dieser positiven Schranke folgt auch die Monotonie von $\mathfrak{L}$ im Intervall, für große N; denn:

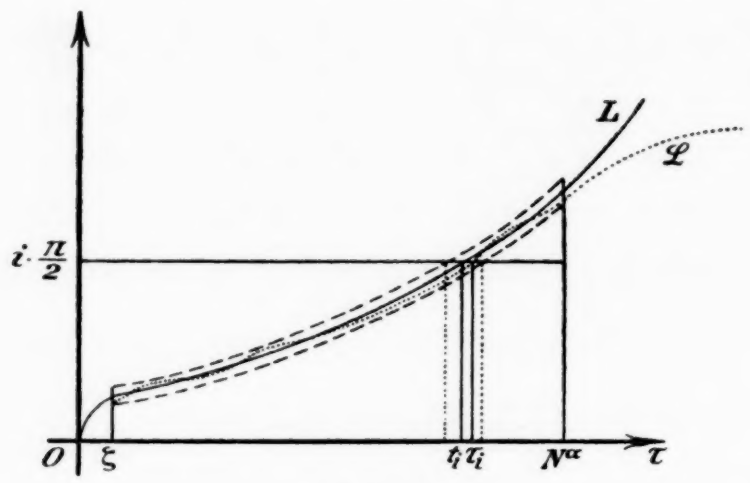


Fig. 8.

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\tau} = \sqrt{2\tau} + \frac{\sin 2\mathfrak{L}}{4\tau} + \varepsilon = \frac{dL}{d\tau} + \frac{\sin 2\mathfrak{L} - \sin 2L}{4\tau} + \varepsilon,$$

sodaß $\frac{d\mathfrak{L}}{d\tau}$ von $\frac{dL}{d\tau}$ um eine gleichmäßig mit N verschwindende Größe abweicht.

Betrachten wir nun die Gleichungen:

(14 a) $$L(t) = i\,\frac{\pi}{2}$$ und (14 b) $$\mathfrak{L}(\tau) = i\,\frac{\pi}{2},$$

wobei i eine natürliche Zahl sein soll (siehe Fig. 8). Erstere (14 a) besitzt eine und nur eine Lösung t_i im unbegrenzten Intervall $\tau > 0$. Die zweite besitzt höchstens eine Lösung τ_i im Intervall (13 a) für $N > \text{const.}$ In diesem Intervall erreicht $\mathfrak{L}$ Werte von der Ordnung $N^{\frac{3\alpha}{2}}$, so daß (14 b) dort auch wirklich eine Lösung besitzt für $N > N_0$, falls $i < \text{const.}\, N^\mu$, $\mu = \frac{3\alpha}{2} < \frac{2}{5}$.

Beide Gleichungen (14) haben also im Intervall (13 a) für große Werte von N eine und nur eine Lösung t_i bzw. τ_i, falls i eine feste Zahl ist[11]); aber auch, falls i eine ganzzahlige Funktion ist von N, welche der Ungleichung genügt: $i < \text{const.}\, N^\mu$, $\mu = \frac{3\alpha}{2} < \frac{2}{5}$; es ist:

$$t_i > t_{i-1}; \quad \tau_i > \tau_{i-1}.$$

§ 10.

Im Intervall (13 a) wird bei wachsendem N der Röhrenquerschnitt gleichmäßig klein, und wir haben folglich:

(15) $$\tau_i = t_i + \frac{r}{N^{\frac{2}{3} - \frac{5\alpha}{2}}} = t_i + \frac{r}{N^{\frac{2-5\mu}{3}}},$$

wobei $\alpha < \frac{4}{15}$, $\mu < \frac{2}{5}$, $|r|$ beschränkt für $N > N_0$.

Betrachten wir speziell Nullstellen und Extremwerte mit festem Index, also z. B. die erste, zweite, dritte, ... Nullstelle von $w_n(x)$, so ist unser Resultat:

(16) $$x_i = N + N^{1/3}\, t_i \left(1 + \frac{r_i}{N^{\frac{2}{3} - \varepsilon}}\right), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots;$$

---

[11]) Die Einzigkeit der Lösung τ_i von $\mathfrak{L}(\tau) = i\,\frac{\pi}{2}$ im Intervall ist wichtig, weil sonst $N + \tau_{2i} N^{1/3} = x_{2i}$ nicht die i-te Nullstelle von w_n zu sein brauchte.

dabei sind t_i feste Zahlen, ε eine beliebig kleine positive Konstante, r_i eine in N beschränkte Funktion; x_{2i} ist die i^{te} Nullstelle, x_{2i-1} der i^{te} Extremwert (der Ursprung wird nicht mitgezählt). Die asymptotische Darstellung ist so gut, daß der begangene Fehler $(x_i - (N + t_i N^{1/3}))$ mit wachsendem N verschwindet.

Ist hingegen i eine unbeschränkt und monoton zunehmende, ganzzahlige Funktion von N, so können wir t_i durch seinen asymptotischen Wert ersetzen. Es ist:

$$L(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}\left(1 + \frac{r \lg t}{t^{3/2}}\right),$$

also

$$L(t_i) = \frac{2\sqrt{2}}{3} t_i^{3/2}\left(1 + \frac{r \lg t_i}{t_i^{3/2}}\right) = i\,\frac{\pi}{2}$$

$$t_i^{3/2} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\, i\left(1 + \bar{r}\,\frac{\lg t_i}{t_i^{3/2}}\right) = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\, i\left(1 + \bar{\bar{r}}\,\frac{\lg i}{i}\right)$$

$$t_i = \left(\frac{3\pi i}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3}\left(1 + \tilde{r}\,\frac{\lg i}{i}\right),$$

wo $r, \bar{r}, \bar{\bar{r}}, \tilde{r}$ beschränkt sind in N.

Es wird endlich:

$$x_i = N + N^{1/3}\left(\frac{3\pi i}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3}\left(1 + \tilde{r}\,\frac{\lg i}{i}\right)\left(1 + \frac{r}{i^{2/3} N^{\frac{2-5\mu}{3}}}\right) \tag{17}$$

für $i(N) < N^{\mu}$, $\mu < \frac{2}{5}$. [12])

Es ist nun klar zu sehen, weshalb die asymptotische Formel für $w_n(an)$ an der Stelle $a = 1$ ihren Typus ändert; mit wachsendem n rutschen nacheinander alle Nullstellen der Funktion durch den Punkt an (a konstant, > 1). Dadurch entsteht an dieser Stelle ein Oszillieren des Wertes von $w_n(an)$. Wir könnten die Periode der Oszillation aus Formel (17) erschließen, falls sie uns die asymptotische Verknüpfung zwischen Nullstellenindex und Nullstellenlage auch für die Wurzeln von $w_n(x)$ lieferte, die bei an liegen. Dies ist aber nicht der Fall, die Größe ε, die wir von der Gleichung für $\mathfrak{L}$ als Restglied abtrennten, bleibt nicht klein in einem hinreichend großen Intervall. [13])

---

[12]) Diese Formel stimmt überein mit Formel (22) der Arbeit von *Emde* (Archiv der Math. und Phys. (3) **24** (1916); dabei ist i durch $2n$ zu ersetzen, N durch p.

[13]) Auch nach Emde erstreckt sich der Gültigkeitsbereich seiner Formel (22) nicht bis an. (Dort, wenigstens falls $a > \sqrt{2}$, gilt die Entwicklung von Mac Mahon, wie aus der Betrachtung der Debyeschen Reihe gefolgert wird.)

Eingegangen 28. August 1928.

Zur Normentheorie in hyperkomplexen Systemen.

Von *Heinrich Grell* in Jena.

Für ein Linksideal $\mathfrak{l}$ und ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}$ aus einer Maximalordnung $\mathfrak{m}$ eines Dedekindschen hyperkomplexen Systems $\mathfrak{S}$ über dem Körper P der Rationalzahlen gilt bekanntlich die Beziehung

$$N\mathfrak{a}\mathfrak{l} = N\mathfrak{a} \cdot N\mathfrak{l}$$

Der bisherige Beweis [1]) stützt sich wesentlich auf die Struktur des Restklassenringes nach der Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$ und damit auf einen Wedderburnschen Satz [2]) über die Struktur der primären Ringe, der eine Verallgemeinerung des Satzes über die Darstellbarkeit eines einfachen Ringes als Matrizenring ist [3]). Im Hinblick auf die Wichtigkeit des Normengesetzes scheint es vielleicht nicht unerwünscht, einen von diesen starken Hilfsmitteln unabhängigen und zugleich durchsichtigeren Beweis zu geben [4]). Die Überlegungen sind so gefaßt, daß sie unverändert bestehen bleiben, wenn P der Körper der rationalen Funktionen einer Unbestimmten mit einem beliebigen Körper der Charakteristik Null als Konstantenbereich wird.

A. I. Es sei $\mathfrak{m}$ eine Maximalordnung eines Dedekindschen hyperkomplexen Systems $\mathfrak{S}$ über dem Körper P der Rationalzahlen; Σ bedeute den Ring der ganzen rationalen Zahlen. Für ein Linksideal $\mathfrak{l}$ aus $\mathfrak{m}$ ist die Norm $N\mathfrak{l}$ (bez. Σ) definiert als das Ideal aus Σ, das aus der Determinante der Übergangssubstitution zwischen zwei linear unabhängigen Σ-Modulbasen von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ abgeleitet ist; die spezielle Basiswahl ist bekanntlich unerheblich.

II. Für ein Linksideal $\mathfrak{l}$ ist die Norm bekanntlich das Produkt der Elementarteiler des (in leicht ersichtlicher Weise) als Σ-Modul aufgefaßten Restesystems $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{l}$.

III. Σ-operatorisomorphe Moduln (mit endlicher Basis) haben dieselben Elementarteiler.

IV. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Einheitselement und Gültigkeit des Doppelkettensatzes für Linksideale. Dann existiert in $\mathfrak{o}$ ein maximales nilpotentes Ideal, das Radikal $\mathfrak{c}$.

---

[1]) Siehe *E. Artin*, Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, § 3; Abh. des Hamb. math. Seminars **5** (1927), S. 261—289; zitiert mit A*.

[2]) Siehe *E. Artin*, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Satz 11; Abh. des Hamb. math. Seminars **5** (1927), S. 251—260.

[3]) Vgl. etwa *Emmy Noether*, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, § 14, Hauptsatz; Math. Zeitschrift **30** (1929), S. 641—692; zitiert mit N.

[4]) Da die hyperkomplexen Hilfsmittel aus den nachfolgenden Abschnitten A. IV und A. V im Fall der Zahlkörper nahezu trivial werden, wird der vorliegende Beweis hier besonders einfach. Hinsichtlich weiterer Normensätze [vor allem bez. des „Zwischennormensatzes“ (vgl. *E. Hecke*, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Satz 109 (Leipzig 1923); *H. Grell*, Beweis einer Normenrelation, Sitzungsberichte der phys.-med. Sozietät zu Erlangen **60** (1928), S. 161—168)] sowie für die Beziehungen zwischen Grad und Norm sei verwiesen auf eine in den Math. Ann. erscheinende Arbeit: „Zur Verzweigungstheorie in beliebigen Ordnungen algebraischer Zahl- und Funktionenkörper.“ Die dortigen Überlegungen lassen sich leicht sinngemäß aufs Hyperkomplexe übertragen.

Der Restklassenring $\mathfrak{o}|\mathfrak{c}$ ist vollständig reduzibel auf eine direkte Summe endlich vieler einfacher Linksideale, die dann und nur dann untereinander $\mathfrak{o}$-operatorisomorph sind, wenn sie demselben zweiseitig einfachen Bestandteil von $\mathfrak{o}|\mathfrak{c}$ angehören [5]).

V. Ein einfacher $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{M}$ (d. h. ein solcher, in dem es außer dem Nullmodul keinen von $\mathfrak{M}$ verschiedenen $\mathfrak{o}$-Untermodul gibt), für den das Einheitselement von $\mathfrak{o}$ als Einheitsoperator wirkt, ist $\mathfrak{o}$-operatorisomorph einem einfachen Linksideal aus $\mathfrak{o}|\mathfrak{c}$ (vgl. N, § 19).

B. Es genügt den Beweis der Normenformel für ein solches zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}$ zu führen, das ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist.

I. Sei zunächst für passendes natürliches m erfüllt $\mathfrak{p}^{m-1} \leqq \mathfrak{l}$.

Die Glieder $\mathfrak{l}_\nu$ einer von $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0$ nach $\mathfrak{m}$ gezogenen Kompositionsreihe von Linksidealen betrachte man als Moduln bez. des zweiseitig einfachen Ringes $\mathfrak{o} = \mathfrak{m}|\mathfrak{p}^m$. Da $\mathfrak{p}$ ein reziprokes Ideal $\mathfrak{p}^{-1}$ besitzt, geben die Linksideale $\mathfrak{l}'_\nu = \mathfrak{p}\mathfrak{l}_\nu$ eine von $\mathfrak{p}\mathfrak{l}$ nach $\mathfrak{p}$ laufende Kompositionsreihe von Linksidealen: ein zwischen $\mathfrak{l}'_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}'_\nu$ gelegenes und von beiden verschiedenes Linksideal $\mathfrak{k}'$ würde in $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{k}'$ ein zwischen $\mathfrak{l}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{l}_\nu$ gelegenes und von beiden verschiedenes Linksideal liefern. Auch die $\mathfrak{l}'_\nu$ lassen sich als $\mathfrak{o}$-Moduln ansehen.

Nun sind sowohl die Kompositionsfaktoren $\mathfrak{l}'_\nu \mid \mathfrak{l}'_{\nu-1}$ wie die $\mathfrak{l}_\nu \mid \mathfrak{l}_{\nu-1}$ sämtlich $\mathfrak{o}$-operatorisomorph den einfachen Linksidealen aus $\mathfrak{m}|\mathfrak{p}$ [6]); also ist im Sinne der $\mathfrak{o}$-Operatorisomorphie für jeden Index gültig $\mathfrak{l}'_\nu \mid \mathfrak{l}'_{\nu-1} \simeq \mathfrak{l}_\nu \mid \mathfrak{l}_{\nu-1}$.

Die Norm von $\mathfrak{p}\mathfrak{l}$ ist wegen $\mathfrak{p}\mathfrak{l} \leqq \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}$ das Produkt aus $N\mathfrak{p}$ und der von $\mathfrak{p}\mathfrak{l}$ nach $\mathfrak{p}$ führenden Übergangsdeterminante; diese wird gleich dem Produkt der Elementarteilerprodukte der Kompositionsfaktoren $\mathfrak{l}'_\nu \mid \mathfrak{l}'_{\nu-1}$, also gleich dem entsprechenden Produkt für die $\mathfrak{l}_\nu \mid \mathfrak{l}_{\nu-1}$ wegen $\mathfrak{l}'_\nu \mid \mathfrak{l}'_{\nu-1} \simeq \mathfrak{l}_\nu \mid \mathfrak{l}_{\nu-1}$, d. h. gleich $N\mathfrak{l}$. Somit ist für den Fall I erfüllt $N\mathfrak{p}\mathfrak{l} = N\mathfrak{p} \cdot N\mathfrak{l}$.

II. Das weitere ähnelt den Überlegungen aus A*, § 3: Sei $\mathfrak{b}$ ein beliebiges zweiseitiges Idealvielfaches von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^m \cdot \mathfrak{d}$ mit zweiseitigem $\mathfrak{d}$, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{m}$ und $m \geqq 0$. Setzt man $\mathfrak{l}_1 = (\mathfrak{l}, \mathfrak{p}^m)$, $\mathfrak{l}_2 = (\mathfrak{l}, \mathfrak{d})$, so ist $(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2) = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}$. Somit wird der Restklassenmodul $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}|\mathfrak{l}$ direkte Summe $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$ der $\mathfrak{m}$-Moduln $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ mit

$$\mathfrak{n}_1 \simeq \mathfrak{m}|\mathfrak{l}_1;\ \mathfrak{n}_2 \simeq \mathfrak{m}|\mathfrak{l}_2;\ \mathfrak{n}_1 \simeq \mathfrak{n}|\mathfrak{n}_2.$$

Die Norm von $\mathfrak{l}$ ist das Produkt der Elementarteilerprodukte von $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{n}|\mathfrak{n}_1$, d. h. von $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$, also gleich $N\mathfrak{l}_1 \cdot N\mathfrak{l}_2$.

Da in $\mathfrak{m}$ mod. $\mathfrak{l}$ der Doppelkettensatz gilt, kann man $\mathfrak{b}$ so gewählt denken, daß

$$(\mathfrak{l}, \mathfrak{p}^{m-1}) = (\mathfrak{l}, \mathfrak{p}^m) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{p}\mathfrak{l}.$$

Für $\mathfrak{l}^* = \mathfrak{p}\mathfrak{l}$ ist dann

$$\mathfrak{l}_1^* = (\mathfrak{p}\mathfrak{l}, \mathfrak{p}^m) = \mathfrak{p}(\mathfrak{l}, \mathfrak{p}^{m-1}) = \mathfrak{p}(\mathfrak{l}, \mathfrak{p}^m) = \mathfrak{p}\mathfrak{l}_1,$$
$$\mathfrak{l}_2^* = (\mathfrak{p}\mathfrak{l}, \mathfrak{d}) \qquad\qquad = (\mathfrak{l}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{l}_2.$$

Da wie eben $N\mathfrak{p}\mathfrak{l} = N\mathfrak{l}_1^* N\mathfrak{l}_2^*$, hat man also $N\mathfrak{p}\mathfrak{l} = N\mathfrak{l}_1^* \cdot N\mathfrak{l}_2^* = N\mathfrak{p}\mathfrak{l}_1 \cdot N\mathfrak{l}_2$. Wegen $\mathfrak{p}^m \leqq \mathfrak{p}\mathfrak{l}_1$ aber wird nach I erfüllt $N\mathfrak{p}\mathfrak{l}_1 = N\mathfrak{p} \cdot N\mathfrak{l}_1$, womit $N\mathfrak{p}\mathfrak{l} = N\mathfrak{p} \cdot N\mathfrak{l}_1 N\mathfrak{l}_2 = N\mathfrak{p} \cdot N\mathfrak{l}$, w. z. b. w.

---

[5]) Vgl. N, § 12, § 13, § 14 Anfang.

[6]) $\mathfrak{m}|\mathfrak{p}$ ist isomorph dem Restklassenring von $\mathfrak{o}$ nach seinem Radikal.

Ist P ein endlicher algebraischer Zahlkörper mit der Hauptordnung Σ, so definiert man die Norm in bekannter Weise mittels der Quotientenringe, die aus Σ, $\mathfrak{m}$ durch Aufnahme solcher Elemente aus Σ entstehen, die zu einem passenden Ideal aus Σ teilerfremd sind; die Beweise verlaufen fast genau wie im kommutativen Fall [7]).

[7]) Vgl. etwa *H. Grell*, Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, § 4; Math. Ann. **97** (1927), S. 524—558; außerdem die in Fußnote [4]) genannte Arbeit in den Erlanger Berichten.

Eingegangen 25. Januar 1930.

Zur Theorie der höheren Kongruenzen.

Von *S. Lubelski* in Warschau.

Rados [1]) bewies, daß für jede ganze Zahl D und jede natürliche Zahl n, sowie für jede Primzahl p, die identische binomische Kongruenz

$$(1^n - D)(2^n - D) \cdots ((p-1)^n - D) \equiv (D^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^\delta \pmod p$$

gilt, wo δ der größte gemeinschaftliche Teiler von $p-1$ und n ist.

Öystein Ore [2]) hat diese Identität verallgemeinert, und zwar bewies er, daß für jede ganzzahlige ganze rationale Funktion $f(x)$:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

die identische Kongruenz gilt:

$$f(1^n) f(2^n) \cdots f((p-1)^n) \equiv [Z(C_0, C_1, \ldots, C_{\frac{p-1}{\delta}} - 1)]^\delta \pmod p,$$

wo $C_i = A_{m-i} + A_{m-i-\frac{p-1}{\delta}} + A_{m-i-2\frac{p-1}{\delta}} + \cdots$

und

$$Z(C_0, C_1, \ldots, C_{\frac{p-1}{\delta}} - 1) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 \cdots C_{\frac{p-1}{\delta}-1} \\ C_{\frac{p-1}{\delta}-1} & C_1 \cdots C_{\frac{p-1}{\delta}-2} \\ C_1 & C_2 \cdots C_0 \end{vmatrix}$$

eine zyklische Determinante ist.

M. Bauer [3]) bewies den Satz:

$$(x^{p-1} - 1)^{p^{m-1}} \equiv \prod_\tau (x - y_\tau) \pmod{p^m},$$

wo y_τ das System aller verschiedenen teilerfremden Reste (mod p^m) durchläuft.

In dieser Arbeit beweisen wir den allgemeinen

Satz: *Für jede ganze rationale Funktion $f(x)$ mit ganzen Koeffizienten gilt die identische Kongruenz*:

$$[f(x-a)]^{p^{m-1}} \equiv \prod_{u=1}^{p^{m-1}} f(x - a + up) \pmod{p^m},$$

wo a eine beliebige ganze konstante Zahl und p eine beliebige ungerade Primzahl ist.

Aus diesem Satze ergibt sich eine Verallgemeinerung des Bauerschen Satzes; außerdem erkennen wir, daß der Radossche sowie der Oresche Satz auch für höhere Moduln richtig sind.

---

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XLVI (1922), S. 308—314.

[2]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XLVIII (1924), S. 37—40.

[3]) Nouvelles Annales Mathématiques 1902 und Archiv für Mathematik und Physik 1910.

Hilfssatz: *Für jedes x ist*

$$x^{p^{m-1}} \equiv \prod_{u=1}^{p^{m-1}} (x + u\,p) \pmod{p^m}.$$

Beweis: Für $m = 1$ ist der Hilfssatz offenbar. Wir nehmen an, daß der Hilfssatz für $m = n$ richtig ist, und beweisen, daß er auch für $m = n + 1$ zutrifft.

Mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p^{n-1}}$ bezeichnen wir die Zahlen

$$\alpha_1 = p, \quad \alpha_2 = 2\,p, \ldots, \alpha_{p^{n-1}} = p^{n-1} \cdot p\,.$$

Es ist also die Identität zu beweisen:

$$x^{p^n} \equiv \prod_{v=0}^{p-1} (x + \alpha_1 + vp^n)(x + \alpha_2 + vp^n) \cdots (x + \alpha_{p^{n-1}} + vp^n) \pmod{p^{n+1}}.$$

Mit $F_n(x)$ bezeichnen wir das Produkt

$$F_n(x) = \prod_{u=1}^{p^{n-1}} (x + u\,p).$$

Nun beweisen wir die Identität

$$F_{n+1}(x) \equiv [F_n(x)]^p \pmod{p^{n+1}}. \tag{1}$$

Es ist offenbar

$$F_{n+1}(x) = \prod_{v=0}^{p-1} (x + \alpha_1 + vp^n)(x + \alpha_2 + vp^n) \cdots (x + \alpha_{p^{n-1}} + vp^n).$$

Nun ist

$$(x + \alpha_1 + vp^n)(x + \alpha_2 + vp^n) \cdots (x + \alpha_{p^{n-1}} + vp^n)$$

$$\equiv F_n(x) + vp^n \sum_{\tau=1}^{p^{n-1}} \frac{F_n(x)}{x + \alpha_\tau} \equiv F_n(x) + vp^n G(x) \pmod{p^{n+1}},$$

wo $\tau = 1, 2, \ldots, p^{n-1}$ und $G(x) = \sum_{\tau=1}^{p^{n-1}} \frac{F_n(x)}{x + \alpha_\tau}$.

Demnach ist

$$F_{n+1}(x) = \prod_{n=1}^{p^n} (x + up) \equiv \prod_{v=0}^{p-1} [F_n(x) + vp^n G(x)] \equiv [F_n(x)]^p + p^n G(x) \sum_{v=0}^{p-1} v \pmod{p^{n+1}}.$$

Da $\sum_{v=0}^{p-1} v = \frac{p(p-1)}{2}$, ist also die Identität (1) bewiesen. Nun ist, da wegen der Annahme der Satz für $m = n$, also für $F_n(x)$, gilt,

$$F_{n+1}(x) \equiv [F_n(x)]^p = [x^{p^{n-1}} + p^n P(x)]^p \equiv x^{p^n} \pmod{p^{n+1}},$$

wo $F_n(x) = x^{p^{n-1}} + p^n P_n(x)$. Der Hilfssatz ist also stets richtig.

Wir beweisen jetzt den oben angegebenen Satz.

Beweis: Wir betrachten die Identität

$$\prod_{\lambda=1}^{k} (Y + \gamma_\lambda Y_1 + \gamma_\lambda^2 Y_2 + \cdots + \gamma_\lambda^n Y_n) = \Sigma A_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n} Y^{\beta_0} Y^{\beta_1} \cdots Y_n^{\beta_n}.$$

Es ist ersichtlich, daß die Koeffizienten $A_{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n}$ ganze rationale und symmetrische Funktionen der Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ sind.

Ist $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = 0$, dann wird die linke Seite der Gleichung (1) gleich Y^k; die Koeffizienten $A_{\beta_0, \ldots, \beta_n}$, außer $A_{1,0,\ldots,0}$, haben also keine von den Parametern $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ freien Summanden.

Es sei $x - a = X$. Aus der Taylorschen Reihe folgt

$$f(X + up) = f(X) + (up)\frac{f'(X)}{1!} + (up)^2\frac{f''(X)}{2!} + \cdots + (up)^n\frac{f^n(X)}{n!};$$

dabei ist für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(X) = \sum_{e=k}^{n}\frac{e(e-1)\cdots(e-k+1)}{k!}a_{n-e}X^{e-k} \tag{2}$$

$$= \sum_{e=k}^{n}\frac{e!}{(e-k)!\,k!}a_{n-e}X^{e-k} = \sum_{e=k}^{n}\binom{e}{k}a_{n-e}X^{e-k},$$

wenn $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_n$. Jeder Koeffizient der Reihe (2) ist also eine ganze Zahl.

Wir betrachten das Produkt

$$\prod_{u=1}^{p^{m-1}} f(X + up) = \prod_{u=1}^{p^{m-1}}\left[f(X) + (up)\frac{f'(X)}{1!} + \cdots + (up)^n\frac{f^{(n)}(X)}{n!}\right].$$

Wir führen die Multiplikation aus, laut Formel (1), und zwar bezeichnen wir mit Y, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ die Ausdrücke

$$f(X) = Y, \quad \frac{f'(X)}{1!} = Y_1, \ldots, \frac{f^n(X)}{n!} = Y_n$$

und mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p^{m-1}}$ die Zahlen

$$\gamma_1 = p,\ \gamma_2 = 2p, \ldots, \gamma_{p^{m-1}} = p^{m-1}\cdot p. \tag{3}$$

Da die Koeffizienten $A_{\beta_0,\ldots,\beta_n}$ ganze symmetrische Funktionen der Zahlen (3) sind, so sind sie auch ganze Funktionen der elementar-symmetrischen Funktionen dieser Zahlen.

Nun ist jeder Koeffizient B_r der Reihe

$$X^{p^{m-1}} \equiv \prod_{u=1}^{p^{m-1}}(X + up) = X^{p^{m-1}} + \sum_{r=0}^{p^{m-1}} B_r X^r \pmod{p^m}$$

wegen des Hilfssatzes durch p^m teilbar, also jede elementare symmetrische Funktion der Zahlen (3) sicher durch p^m teilbar.

Demnach ist auch jeder Koeffizient $A_{\beta_0,\ldots,\beta_n}$, außer $A_{1,0,\ldots,0}$, (da sie keine von $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p^{m-1}}$ unabhängige Summanden haben), durch p^m teilbar:

$$A_{\beta_0,\ldots,\beta_n} \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

Somit ist der Satz bewiesen.

Anwendungen:

I. Wir betrachten die Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1 \equiv (x - y_1)(x - y_2)\cdots(x - y_{\frac{p-1}{\delta}}) \pmod{p},$$

wo δ ein Teiler der Zahl $p-1$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{p-1}{\delta}}$ die verschiedenen Lösungen der Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sind.

Wir haben also bei einer gewissen Funktion $P(x)$

$$x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1 = (x - y_1)(x - y_1)\cdots(x - y_{\frac{p-1}{\delta}}) + p\,P(x),$$

und demnach ist für eine gewisse Funktion $P_1(x)$

$$(x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^p = [(x - y_1)(x - y_1) \cdots (x - y_{\frac{p-1}{\delta}})]^p + p^2 P_1(x)$$

und ähnlich, wenn wir nur weiter die linke Seite der Gleichung zur p-ten Potenz erheben. So erhalten wir endlich die Kongruenz

$$(4) \qquad (x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{p^{m-1}} \equiv [(x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_{\frac{p-1}{\delta}})]^{p^{m-1}} \pmod{p^m}.$$

Es sei jetzt in unserem Satze

$$f(x - a) = x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1 .$$

Es ist wegen (4)

$$(5) \qquad (x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{p^{m-1}} \equiv \prod_{\tau} (x - z_\tau) \pmod{p^m},$$

wo z_τ das System derjenigen verschiedenen teilerfremden Reste (mod p^m) durchläuft, die einer der Zahlen der oben erklärten Folge

$$(6) \qquad y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{p-1}{\delta}}$$

kongruent sind.

Für $\delta = 1$ erhalten wir den Satz von M. Bauer [3]).

II. Wir betrachten die Resultante $R(f, \varphi)$ der Funktionen

$$f(x) = x^n - D \quad \text{und} \quad \varphi(x) = (x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{p^{m-1}},$$

also

$$R(f, \varphi) = \{[(\varepsilon_1 \sqrt[n]{D})^{\frac{p-1}{\delta}} - 1][(\varepsilon_2 \sqrt[n]{D})^{\frac{p-1}{\delta}} - 1] \cdots [(\varepsilon_n \sqrt[n]{D})^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)\}^{p^{m-1}},$$

wo $\varepsilon_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ die n-ten Einheitswurzeln durchläuft.

Wir nehmen an, daß $p - 1$ durch $n\delta$ teilbar ist, also $\varepsilon^{\frac{p-1}{\delta}} = 1$ ist, und demnach

$$R(f, \varphi) = [D^{\frac{p-1}{\delta n}} - 1]^{np^{m-1}} .$$

Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine ganzzahlige ganze rationale Funktion der Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Es sei

$$(\dagger) \qquad (x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{p^{m-1}} = \sum_{\nu=0}^{\frac{p-1}{\delta} p^{m-1}} A_\nu x^\nu$$

und

$$(\dagger\dagger) \qquad \prod_{\tau=1}^{\frac{p-1}{\delta} p^{m-1}} (x - z_\tau) = \sum_{\nu=0}^{\frac{p-1}{\delta} p^{m-1}} A'_\nu x^\nu,$$

wo A_ν und A'_ν ersichtlich ganze Zahlen sind; wegen der Kongruenz (5) ist

$$A_\nu \equiv A'_\nu \pmod{p^m};$$

somit ist

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad F(A_0, \ldots, A_\nu) \equiv F(A'_0, \ldots, A'_\nu) \pmod{p^m}.$$

Es sei jetzt $P(x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{p-1}{\delta} p^{m-1}})$ eine ganzzahlige ganze symmetrische Funktion der Wurzeln der Gleichung

$$(x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{p^{m-1}} = 0\,.$$

Es ist dann eine gewisse ganzzahlige ganze rationale Funktion F vorhanden, so daß

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}}) = F(A_1, A_1, \ldots, A_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}};$$

also

$$\equiv F(A_1', A_2', \ldots, A'_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}}) \pmod{p^m}.$$

Diese Formel erlaubt uns, in der Funktion P die Zahlen $x_1, \ldots, x_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}}$ durch die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}}$ zu ersetzen, und zwar ist

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}}) \equiv P(z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}}) \pmod{p^m}.$$

Da die Resultante $R(f, \varphi)$ stets solch eine Funktion P darstellt, so erhält man unmittelbar, wegen (5),

$$R(f, \varphi) = (D^{\frac{p-1}{\delta n}} - 1)^{np^{m-1}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{\delta}np^{m-1}} \prod_{\tau=1}^{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}} (z_\tau^n - D) \pmod{p^m}.$$

Für $\delta = 1$ und $m = 1$ erhielt dieses Ergebnis G. Rados [1]).

III. Es sei g eine primitive Wurzel (mod p^m); also sind alle verschiedenen Wurzeln der Kongruenz

$$x^{\frac{p-1}{\delta}p^{m-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p^m} \tag{7}$$

von der Gestalt

$$g^{i\delta}, \quad \text{wo} \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{p^{m-1}(p-1)}{\delta} = \delta'. \tag{8}$$

Demnach ist auch die Zahl $g^{\frac{n}{\delta}}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl und δ der größte gemeinschaftliche Teiler von n und $p - 1$ ist, eine primitive Wurzel (mod p^m). Also sind die Wurzeln der Kongruenz (7) durch die Folge

$$g^{\frac{n}{\delta}\delta i} = g^{ni}, \quad \text{wo} \quad i = 1, 2, \ldots, \frac{p^{m-1}(p-1)}{\delta} = \delta' \tag{8'}$$

darstellbar, oder durch die Folge

$$g^{ni}, \quad \text{wo} \quad i = \delta' + 1, \ \delta' + 2, \ldots, 2\delta' = 2\frac{p^{m-1}(p-1)}{\delta}, \tag{8''}$$

etc.

Aus (5) folgt, daß die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{p^{m-1}(p-1)}{\delta}} = z_{\delta'}$ alle verschiedenen Wurzeln der Kongruenz (7) darstellen. Wegen (8') und (8'') läßt sich die zunehmende Folge der Zahlen

$$1^n, 2^n, \ldots, l_k^n, \ldots, l_{\varphi(p^m)}^n,$$

wo jedes Element dieser Folge durch p nicht teilbar ist, in δ verschiedene, aber (mod p^m) dem System

$$z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{p^{m-1}(p-1)}{\delta}}$$

kongruente Systeme zerlegen.

Man hat also

$$f(1^n)\, f(2^n) \cdots f(l^n_{\varphi(p^m)}) \equiv [f(z_1)\, f(z_2) \cdots f(z_{\delta'})]^\delta \pmod{p^m}.$$

Weiter kann man die Wurzeln der Kongruenz (7) dadurch charakterisieren, daß sie das volle System derjenigen Zahlen sind, welche (mod p^m) zueinander verschieden, aber (mod p) einer der Zahlen der Folge (6) kongruent sind.

Nun ist die Resultante $R(f, \varphi^{p^{m-1}})$ der Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)^{p^{m-1}} = (x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)^{p^{m-1}}$ wegen (5) und wegen (†), (††), (†††) dem Produkt

$$f(z_1)\, f(z_2) \cdots f(z_{\delta'})$$

kongruent (mod p^m).

Aber

$$R(f, \varphi^{p^{m-1}}) = [R(f, \varphi)]^{p^{m-1}}.$$

Es sei jetzt, bei gewissen $f(x)$ und $\psi(x)$,

$$f(x) = (x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1)\, f_1(x) + \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ von kleinerem Grade als $x^{\frac{p-1}{\delta}} - 1$ ist. Es sei

$$\psi(x) = C_{\frac{p-1}{\delta}-1}\, x^{\frac{p-1}{\delta}-1} + \cdots + C_0.$$

Dann ist

$$R(\psi, \varphi) = Z(C_0, C_1, \ldots, C_{\frac{p-1}{\delta}-1})$$

$$= \begin{vmatrix} C_0 & C_1 \cdots C_{\frac{p-1}{\delta}-1} \\ C_{\frac{p-1}{\delta}-1} & C_1 \cdots C_{\frac{p-1}{\delta}-2} \\ \vdots & \\ C_1 & C_2 \cdots C_0 \end{vmatrix},$$ [4])

folglich

$$f(1^n)\, f(2^n) \cdots f(l^n_{\varphi(p^m)}) \equiv [f(z_1)\, f(z_2) \cdots f(z_{\delta'})]^\delta$$
$$\equiv [\psi(z_1)\, \psi(z_2) \cdots \psi(z_{\delta'})]^\delta \equiv [Z(C_0, C_1, \cdots, C_{\frac{p-1}{\delta}-1})]^{\delta p^{m-1}} \pmod{p^m}.$$

Für $m = 1$ erhielt dieses letzte Ergebnis Herr Ore [2]).

Bemerkung: Alle Anwendungen sind besondere Fälle nicht nur des Satzes, sondern wie leicht zu sehen, auch des Hilfssatzes.

[4]) Vgl. z. B. *G. Kowalewski*, Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig 1909), S. 115.

Eingegangen 18. April 1928.